This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

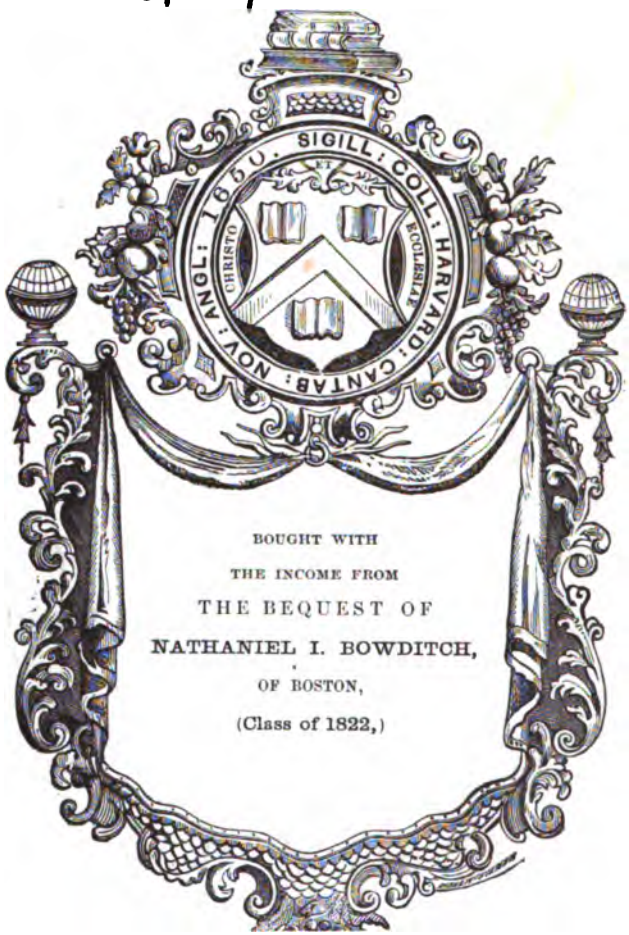
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3009.02.7



SCIENCE CENTER LIBRARY

BUCHBINDEREI

18240

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie

eine Revision der Principien.

Vorlesung,

gehalten während des Sommersemesters 1901

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Conrad Müller.

LEIPZIG 1902.
In Commission bei B. G. Teubner.

Math 3009.02.7

Bowditch fund.

Vorwort.

Indem ich nachstehend die Vorlesung, welche ich im vergangenen Sommer gehalten habe, in autographischer Ausarbeitung veröffentliche, möchte ich einen neuen Schritt in der Richtung thun, der meine Bemühungen in den letztvergangenen Jahren vorwiegend gegolten haben: die mathematische Wissenschaft als ein zusammengehöriges Ganzes nach allen Seiten wieder so zur Geltung zu bringen, wie es früher, als es noch keinen Specialismus gab, als selbstverständlich galt, insbesondere aber zu erreichen, dass zwischen den Vertretern der abstracten und der angewandten Mathematik wieder mehr gegenseitiges Verständniss Platz greife, als augenblicklich besteht. Ich habe schon wiederholt darauf hingewiesen, dass in letzterer Hinsicht eine klare Erfassung des Unterschiedes und der gegenseitigen Beziehungen derjenigen beiden Teile der Mathematik von centraler Bedeutung sein dürfte, die im Folgenden als Präcisionsmathematik und Approximationsmathematik bezeichnet werden. Aehnliche Gedanken sind in den letzten Jahren von den Herren Burkhardt und Heun geäussert worden; man vergleiche die Antrittsrede des Ersteren (Zürich 1897*), die neuerdings durch den Wiederabdruck in dem ersten Heft von Bd. 11 des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung dem weiteren Kreise der Fachgenossen zugänglich geworden ist, und den Bericht von Herrn Heun über die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik in Bd. 9 daselbst (1900—1901); in diesem Berichte tritt das Wort „Approximationsmathematik", so viel ich weiss, zum ersten Male auf; jedenfalls habe ich es von dort entnommen. Um so mehr darf vielleicht eine ausführliche Auseinanderlegung der in Betracht kommenden Gegensätze, wie sie die folgende Vorlesung für das Gebiet der Geometrie giebt, nunmehr auf Interesse und Verständniss in weiteren Kreisen rechnen.

*) Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken.

Zugleich vervollständige ich mit dieser Vorlesung die Auseinandersetzungen, welche ich verschiedentlich über die Methoden des mathematischen Unterrichts, insbesondere des mathematischen Hochschulunterrichts gab (siehe z. B. Jahresbericht, Bd. 8, 1898—1899). Meine Ansicht ist nach wie vor, dass der Unterricht der Anfänger, sowie derjenigen Zuhörer, welche die Mathematik nur als ein Hülfsmittel für anderweitige Studien gebrauchen wollen, von den anschauungsmässigen Momenten einen naiven Gebrauch machen soll; die Ueberzeugung, dass dies aus pädagogischen Gründen, mit Rücksicht auf die Veranlagung der Mehrzahl der Studierenden, notwendig sei, kommt in den letzten Jahren sichtlich immer mehr, insbesondere auch im Auslande, zur Geltung. Aber nicht minder ist meine Ueberzeugung (was ich nie unterlassen habe, hinzuzufügen), dass ein solcher Unterricht, entsprechend der heutigen Entwickelung der Wissenschaft, für die Ausbildung der Fachmathematiker auf der Oberstufe nicht genügt, dass hier vielmehr neben den Thatsachen der Anschauung die centrale Bedeutung des modernen Zahlbegriffs und der weitgehenden mit ihm zusammenhängenden Entwickelungen hervortreten muss. Und nun vermisse ich in den Lehrbüchern und Vorlesungen, welche ich kenne, die Ueberleitung von der einen Auffassung zur anderen. Hier will sich die folgende Darstellung als eine Ergänzung einschieben; ihr bestes Ziel wird erreicht sein, wenn sie sich eines Tages als überflüssig erweisen sollte, weil die Ueberlegungen, die sie bringt, zu selbstverständlichen Bestandteilen jedes höheren mathematischen Unterrichts geworden sind.

Göttingen, den 28. Februar 1902.

F. Klein.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Von den Funktionen reeller Veränderlicher und ihrer Darstellung im rechtwinkeligen Koordinatensystem.

1. Erläuterungen über die einzelne unabhängige Variable x

Empirische und abstrakte Genauigkeit. Der moderne Zahlbegriff . . . 5
Präcisions- und Approximationsmathematik, auch in der reinen Geometrie 11
Anschauung und Denken, erläutert an verschiedenen Teilen der Geometrie 20
Exemplification an zwei einfachsten Sätzen über Punktmengen 25

2. Funktionen von x.

Die abstrakte und die empirische Festlegung einer Funktion (Idee des Funktionsstreifens) 32
Von der Leistungsfähigkeit der räumlichen Anschauung 39
Von der Genauigkeit der Naturgesetze (mit Excurs über die verschiedenen Ideen betr. die Constitution der Materie) 41
Attribute der empirischen Curve: Zusammenhang, Richtung, Krümmung . 50
Cauchy's Definition der stetigen Funktion. Wie weit reicht die Analogie mit der empirischen Curve? 59
Die Integrierbarkeit der stetigen Funktion 65
Der Satz von der Existenz des Maximums, bezw. Minimums 72
Die 4 Grenzwerte des Differenzenquotienten 76
Weierstrass' nicht differentierbare Funktion; ihr Allgemeinverlauf . . . 83
Ihre Nichtdifferentierbarkeit 93
Die „vernünftigen" Funktionen 101

3. Von der angenäherten Darstellung der Funktionen.

Seite

Approximation empirischer Daten durch vernünftige Funktionen 103
Annäherung vernünftiger Funktionen durch einfache analytische Ausdrücke 109
Lagrange's Interpolationsformel 110
Der Taylor'sche Satz und die Taylor'sche Reihe 117
Annäherung des Integrals und des Differentialquotienten durch die Taylor'sche Reihe 121
Von den analytischen Funktionen und ihrer Verwendung für die Naturerklärung 126
Interpolation durch eine endliche trigonometrische Reihe 139

4. Nähere Ausführungen zur trigonometrischen Darstellung der Funktionen.

Fehlerabschätzung bei der Darstellung empirischer Funktionen 144
Trigonometrische Interpolation gemäss der Methode der kleinsten Quadrate 150
Der harmonische Analysator, nebst Beispielen trigonometrischer Reihen . 152
Art der Annäherung durch endliche trigonometrische Reihen 158
Tschebycheff's Arbeiten über Interpolation 166

5. Funktionen zweier Veränderlicher.

Grundbegriffe der Stetigkeit u. s. w., der Entwickelbarkeit 172
Praktische Beispiele von Funktionen, für welche $\frac{d^2f}{dx\,dy} \gtrless \frac{d^2f}{dy\,dx}$ . . . 179
Approximative Darstellung von Funktionen der Kugelfläche durch Reihen nach Kugelfunktionen 190
Die Werteverteilung der Kugelfunktionen über die Kugel hin 202
Fehlerschätzung bei der abbrechenden Kugelfunktionenreihe 205

II. Freie Geometrie.

1. Präcisionstheoretische Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Sätze über Punktmengen 211
Punktmengen, die durch Inversion an 2 oder mehr sich nicht schneidenden Kreisen hervorkommen 213
Eigenschaften dieser Mengen. Allgemeine Wichtigkeit der Punktmengen in der Geometrie 228
Begriff des 2-dimensionalen Continuums. Allgemeiner Curvenbegriff . . 233
Von der Peano-Curve, die ein ganzes Quadrat überdeckt 238
Engerer Curvenbegriff: die Jordan-Curve 247
Weitere Einengung des Curvenbegriffs: die reguläre Curve 251
Approximation anschaulicher Curven durch reguläre Idealcurven 257

Seite

Vorstellbarkeit der Idealcurven 260
Spezialisierung der Idealcurven: Analytische, algebraische Curven. Geometrische Erzeugung der letzteren nach Grassmann 262
Beherrschung des Empirischen durch Idealgebilde; Perry's Standpunkt . . 272

2. Fortsetzung der präcisionstheoretischen Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Iterierte Inversion an 2 sich berührenden Kreisen 275
Dasselbe an 3 sich berührenden Kreisen („Modulfigur") 284
Der Normalfall von 4 sich in cyklischer Reihenfolge berührenden Kreisen (grosse Figur auf pg. 296) 295
Der allgemeine Fall von 4 sich in cyklischer Reihenfolge berührenden Kreisen (grosse Figuren auf pg 304, 307) 298
Eigenschaften der hierbei entstehenden nicht-analytischen Curven . . . 309
Voraussetzung dieser ganzen Entwickelungen. Weitere Idealisierung bei Veronese 317

3. Uebergang zur praktischen Geometrie: A) Geodäsie.

Ungenauigkeit aller praktischen Messungen. Ausführungen beim Pothenot'schen Problem 328
Festlegung des Genauigkeitsmaasses durch iterierte Messungen. Principielle Auffassung der Methode der kleinsten Quadrate 333
Approximatives Rechnen, erläutert am Legendre'schen Satze für kleine sphärische Dreiecke 336
Die geodätische Bedeutung der kürzesten Linie auf dem Erdsphäroid (nebst Postulaten betr. die Theorie der Differentialgleichungen) 339
Von dem Geoid und seiner praktischen Festlegung 349

4. Fortsetzung der praktischen Geometrie: B) zeichnende Geometrie.

Postulierung einer Fehlertheorie auch für die zeichnende Geometrie, erläutert an der zeichnerischen Wiedergabe des Pascal'schen Satzes 358
Von der Möglichkeit, aus der empirischen Gestalt auf Eigenschaften der Idealcurve zu schliessen 366
Anwendung des Verfahrens speziell auf algebraische Curven. Algebraische Vorkenntnisse, die wir voraussetzen 371
Aufstellung des zu beweisenden Theorems: $w' + 2t'' = n\ (n-2)$ 381
Prinzipien des zu führenden Continuitätsbeweises 386
Uebergang der C_n durch eine Form mit Doppelpunkt 392
Beispiele von Curven, bei denen das Theorem stimmt, für gerade n . . 398
Desgleichen für ungerades n 407
Erläuterung des Continuitätsbeweises an Beispielen 413
Durchführung des Continuitätsbeweises 421

III. Anhang: Von der Versinnlichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Seite

Gestaltliche Verhältnisse bei singularitätenfreien Raumcurven, insb. C_3 (Projektionen der Curven und ebene Schnitte der Developpablen) . . 424
Die 7 Arten singulärer Punkte von Raumcurven 347
Allgemeines über die Gestalt singularitätenfreier Flächen 441
Von den Doppelpunkten der F_3, insbesondere ihren biplanaren und uniplanaren Punkten 447
Von dem gestaltlichen Verlauf der F_3 überhaupt 457

Appell zu immer erneuter Correktur des traditionellen Wissenschaftsbetriebes durch Naturbeobachtung 467

Berichtigung:

pg. 45 Zeile 24 statt *Genauigkeit* lies *Unbestimmtheit.*

pg. 46 Zeile 5 und 6 statt *und für das Intervall bis zu den entferntesten Planeten als völlig unbestimmt und gering an* lies *und nur für das Intervall bis zu den entferntesten Planeten als sehr gering an.*

Einleitung.

Durch die neuzeitliche mathematische Litteratur geht ein tiefgreifender Zwiespalt, der Ihnen allen entgegengetreten sein muss: die Interessen und Gedankengänge der Theoretiker sind von denjenigen Methoden, deren man sich bei den Anwendungen thatsächlich bedient, ausserordentlich verschieden. Hierunter leidet nicht nur die wissenschaftliche Ausbildung des Einzelnen, sondern die Geltung der Wissenschaft selbst. Es scheint ausserordentlich wichtig, den hieraus entstehenden Missständen entgegenzuarbeiten. Die Vorlesung, die ich hier beginne, will einen Beitrag liefern, indem sie darauf ausgeht, die verschiedenen Arten mathematischer Fragestellung, wie sie hier und dort naturgemäss sind, sozusagen vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus, gegeneinander in klare Beziehung zu setzen. Sie sollen nach der einen

Seite die Interessen der modernen Theoretiker verstehen lernen, nach der anderen Seite aber ein Urteil darüber gewinnen, welche Teile der mathematischen Spekulation für die Anwendungen unmittelbare Bedeutung haben. Ich zweifele nicht, daß Ihnen die Entgegenstellung verschiedener Gesichtspunkte, die solcherweise resultieren wird, interessant und förderlich sein wird, möchte die Erkenntnis erreichen, daß die bei Ihnen resultierende Überzeugung sich in die That umsetzt, und Sie später an Ihrem Teile beitragen, die arg vereinseitigte Entwickelung unserer Wissenschaft wieder zu einer allseitigen, harmonischen zu machen!

Das Programm, das ich hiermit aufstelle, ist allerdings viel zu umfassend, als daß es sich in einem Semester nach allen Seiten hin entwickeln liesse. Ich werde daher wesentlich nur <u>ein</u> Gebiet der Mathematik in den Vordergrund rücken, nämlich <u>die Geometrie</u>. Die Praxis der Geometrie umfaßt das geometrische Zeichnen und das Vermessungswesen, denen nach anderer Seite die von den Griechen begonnene abstrakte Behandlung geometrischer Probleme entgegentritt. Ich werde die auf beiden Seiten in Betracht kommenden Fragen analytisch behandeln. Dies wäre an sich keine Notwendigkeit, man kann auch so vorgehen, daß man

nirgends aus dem geometrischen Gebiete als solchem heraustritt. Inzwischen hat sich die Ausbildung der von mir zu besprechenden Fragestellungen wesentlich im Anschluss an die Analysis vollzogen: insbesondere kommt für uns die Entwicklung und Bedeutung der Differential- und Integralrechnung in Betracht. Von hier aus habe ich den Titel der gegenwärtigen Vorlesung gewählt. — In den parallellaufenden Seminarübungen werde ich ausgewählte Kapitel der Geodäsie traktieren, die geeignet scheinen, den mehr allgemein gehaltenen Entwickelungen der Vorlesung als Beispiele rationeller Anwendung an die Seite zu treten.

Als Litteratur kann ich kein Lehrbuch nennen. Ich werde von Fall zu Fall die Einzellitteratur citieren und im Übrigen mit Vorliebe auf die im Erscheinen begriffene

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 7 Bde

hinweisen, deren Programm es ist, die ganze Mathematik des 19ten Jahrhunderts zur Darstellung zu bringen und deren gesamte Litteratur zu gruppieren.

Vielleicht komme ich in den folgenden Semestern dazu, das gleiche Programm auch noch auf andere Gebiete der Mathematik auszudehnen. Es wird sich uns

besondere um die Fragestellungen der mathematischen Naturerklärung (Mechanik u.s.w.) handelt. Eine Reihe hierher gehöriger Ideen ist in dem Gutachten enthalten, welches unsere Göttinger philosophische Facultät letzthin bei der Feier der Beneke-Stiftung erstattet hat[1].

Im Übrigen knüpfe ich wesentlich an eine eigene Arbeit an, die ich im Jahre 1873 unter dem Titel:

F. Klein: Über den Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve

in den Erlanger Berichten publicierte (abgedruckt in Bd. 23 der Mathematischen Annalen). Ich kann auch auf den Vortrag VI meines Evanston Colloquiums:

F. Klein: Lectures on Mathematics, New-York 1894, französisch von L. Laugel, Paris 1898

verweisen. Der Titel des Vortrags lautet:

On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences.

---

[1] Göttinger Nachrichten 1901, Geschäftliche Mitteilungen Heft 1, auch Mathematische Annalen 55 (1901).

Ich wende mich nun gleich dem ersten Teile meiner Vorlesung zu, den ich überschreibe:

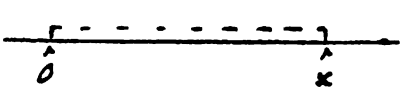
I. Von den Funktionen zweier Veränderlicher und ihrer Darstellung im rechtwinkeligen Koordinatensystem.

Ich beginne systematisch in der Weise, daß ich zunächst gar nicht von Funktionen spreche, sondern vorab

I, 1 Erläuterungen über die einzelne Veränderliche x

die unabhängige Veränderliche x

selbst in's Auge fasse, die ich mir geometrisch auf einer Abscissenaxe mit fest gewähltem Anfangspunkt O als Punkt dadurch deute, daß ich derselben den Betrag der Abscisse als Zahlenwert x beilege.



Ich wünsche hier nun das Interesse auf die Genauigkeit einer solchen Operation zu richten. In dieser Beziehung ist zu bemerken:

Wenn ich irgend ein empirisches Verfahren anwen-

de, zu denen ich das Zeichnen, Messen, das visuelle Auffassen durch das Augenmaass oder auch das geistige Reproducieren durch räumliches Vorstellen rechne, so kommt der obigen Festlegung nur beschränkte Gültigkeit zu, wie ich dies beim Messen mit einigen Zahlenwerten belegen werde.

Bedient man sich beim Messen der heutzutage erreichbaren äussersten Präcision, so kann man beim Messen von 1 m die Genauigkeit bis auf $^1/_{10}\,\mu$ ($\mu = {}^1/_{1000}$ mm) steigern. Wollte man noch weiter gehen, so droht die Lichtwirkung in den verschärften Mikroskopen (wegen Auftretens der Beugung) zu versagen, sowie auch die Molekularstruktur der Materie in ihre Rechte eingetreten (da die Molekulardistanzen $^1/_{50}\,\mu$ sind), so dass also die physikalischen Gesetze, denen Licht und Materie unterworfen sind, eine grössere Genauigkeit beim Messen zu verbieten scheinen. In Metern ausgedrückt ist $^1/_{10}\,\mu = 0{,}000\,0001$, sodass also die Längenangaben in Metern im günstigsten Falle bis zur 7ten Dezimale zuverlässig sind.

Ähnlich liegen die Verhältnisse beim Zeichnen und Messen durch Augenmaass, nur dass hier der Schwellenwert d. h. der Wert, jenseits dessen sich die Beobachtung nicht mehr ausdehnen lässt, natürlich viel höher liegt.

Immerhin läßt sich aber als obersten Satz, der kein eigentlich mathematischer Satz ist, aber für die Anwendungen der Mathematik fundamental ist, folgenden aufstellen:

In allen diesen praktischen Gebieten gibt es einen Schwellenwert der Genauigkeit.

Wie steht es aber mit dem räumlichen Vorstellen?

Wir kommen mit dieser Frage in ein controverses Gebiet, da hier die Philosophen zu den verschiedensten Zeiten die verschiedensten Ansichten aufgestellt haben. Es ist insbesondere J. Kant und seine Schule, die mit sehr bestimmten Auffassungen hervorgetreten sind. Es erscheint bei Kant die räumliche Vorstellung als etwas absolut Exaktes (nichts Verschwommenes). Demgegenüber ist hervorzuheben, daß der moderne Mathematiker zahlreiche Beispiele von Raumgebilden anzugeben vermag, deren räumliche Vorstellung wegen der Feinheit der in Betracht kommenden Struktur schlechterdings unmöglich erscheint. Ich glaube also auch beim räumlichen Vorstellen an einen Schwellenwert, will Ihnen aber gar nicht diese Ansicht aufoktroyieren, sondern an den verschiedenen Stellen auf die erwähnten Beispiele hinweisen und diese Ihrer eigenen Prüfung auf ihre räumliche Vorstellbarkeit hin überlassen. Ich formuliere da-

her hinsichtlich des räumlichen Vorstellens nur folgenden Satz:

Ob auch beim Vorstellen räumlicher Gebilde ein derartiger Schwellenwert existiert, ist controvers und mag der wiederholten Prüfung an später mitzuteilenden Beispielen überlassen bleiben.

Der hier mit Anschluss an die unabhängige Veränderliche x entwickelte Begriff des Schwellenwertes existiert übrigens auch in anderen Fällen z. B. beim praktischen Zahlenrechnen, worauf wir bald zurückkommen.

Vergleichen Sie nun mit diesen empirischen Erfahrungsweisen zur Festlegung der Zahl x ihre arithmetische Definition, wie dieselbe z. Z. in den Lehrbüchern gegeben wird, so bemerken Sie, dass bei letzterer die Genauigkeit unbegrenzt ist.

Wir verständigen uns zunächst über diese arithmetische Definition einer Zahl x, kurz gesagt, über den modernen Zahlbegriff.

Um nicht zu weit ausholen zu müssen, werden wir sagen, dass wir eine Zahl als durch einen Dezimalbruch definiert ansehen, dabei aber auch noch einen unendlichen Dezimalbruch als Definition einer bestimmten Zahl gelten lassen. Wird nun auch umgekehrt jede Zahl durch einen bestimmten Dezimalbruch vorgestellt?

Hier ist zunächst eine allgemeine Verabredung zu treffen, die man hinsichtlich der beiden Dezimalbrüche:

$$1{,}000\,000\ldots$$

$$0{,}999\,999\ldots$$

trifft. Man setzt nämlich fest, daß beide dieselbe Zahl vorstellen sollen. Dies ist an sich eine willkürliche Festsetzung, bei der daher nichts zu beweisen ist; wohl aber kann man nach dem Prinzip dieser Festsetzung fragen. Subtrahiert man die beiden Dezimalbrüche, so ergiebt sich

$$0{,}000\,000\ldots$$

mit einer 1, die stets weiter nach rechts rückt, je mehr Stellen man bei der Rechnung nimmt; diese Differenz wird also im Limes kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Zahl. Man mache nun ausdrücklich folgende Verabredung, die K. Weierstraß in seinen Vorlesungen stets als solche hervorhob:

Zwei Zahlen sollen gleich heissen, wenn sie sich von einander um weniger als eine noch so kleine vorgegebene Größe unterscheiden.

Dann folgt in der That $1{,}000\,000\ldots = 0{,}999\,999\ldots$ und überhaupt werden wir für einen endlichen Dezimalbruch setzen dürfen: Jeder endliche Dezimalbruch kann so abgeändert werden, daß man die letzte Ziffer um eine Einheit vermindert und dann lauter Neunen fol-

gen läßt. Dies ist aber die einzige Unbestimmtheit, auf die wir stossen. Also:

Jeder endliche oder unendliche Dezimalbruch liefert eine Zahl und jede Zahl, von dem gerade erwähnten Ausnahmefall abgesehen, nur einen Dezimalbruch.

Wie unterscheiden sich bei dieser Darstellung die rationalen und irrationalen Zahlen?

Als Antwort ist aus den Elementen bekannt: Als Dezimalbruch geschrieben ist eine rationale Zahl $\zeta = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen) dadurch kenntlich, daß der Dezimalbruch entweder abbricht oder periodisch ausläuft. Auch das Umgekehrte ist richtig. Dies nur beiläufig.

Es ist natürlich erforderlich, die formalen Rechnungsgesetze, welche zunächst nur für die rationalen Zahlen aufgestellt werden, auch auf die Irrationalzahlen auszudehnen, und als Buch, in dem diese Einordnung der Irrationalzahlen in leichtfaßlicher und doch sehr eingehender Weise vollzogen ist, möchte ich Ihnen insbesondere empfehlen:

J. Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886.

Im Übrigen wolle man in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften das Referat von

A. Pringsheim: Irrationalzahlen und Konvergenz un-

endlicher Prozesse, Bd I, pg. 49 ff.
vergleichen (p. 49–58 kommt zunächst in Betracht
und sollte von jedem Mathematiker gelesen werden).

Und nun der Punkt, auf den es mir besonders hier
ankommt: Ein solcher Dezimalbruch hat eine unbe-
grenzte Genauigkeit d.h. der Schwellenwert, von dem wir
oben sprachen, sinkt hier in der abstrakten Arithme-
tik unter jede Grenze. Damit haben wir den fundamen-
talen Gegensatz zwischen Empirie und Idealisierung,
den ich in diesem besonderen Falle so formuliere:

Im idealen Gebiet der Arithmetik giebt es keinen
endlichen Schwellenwert, wie im empirischen Gebiet,
sondern die Genauigkeit, mit der die Zahlen defi-
niert werden oder doch als definiert angesehen werden,
ist unbegrenzt.

Der hier im speziellen Falle zwischen der empirischen
Festlegung einer Größe in der praktischen Geometrie
und der genauen Definition in der abstrakten Arith-
metik constatierte Unterschied von begrenzter und un-
begrenzter Genauigkeit findet sich nun immer wieder,
wenn man irgend ein Gebiet der äußeren Wahrneh-
mung oder der praktischen Bethätigung mit der abstrak-
ten Mathematik vergleicht. Er gilt für die Zeit, für al-
le mechanischen und physikalischen Größen und na-

mentlich auch für das numerische Rechnen. Denn was ist das Rechnen mit 7-stelligen Logarithmen etwa anderes, als ein Rechnen mit Zahlen, deren Genauigkeit nur bis zur 7ten Stelle reicht? Andrerseits kann man in jedem Gebiet an der Hand geeigneter Axiomsysteme (wie wir noch sehen werden) zur absoluten Genauigkeit fortschreiten; wir setzen dann eben an die Stelle der praktischen Wissenschaft ein idealisiertes Gedankending.

Diese Unterscheidung zwischen absoluter und beschränkter Genauigkeit, die sich als roter Faden durch die ganze Vorlesung ziehen wird, bedingt nun eine große Zweiteilung der gesamten Mathematik. Wir unterscheiden:

1) Präzisionsmathematik (Rechnen mit absolut genauen Zahlen)

2) Approximationsmathematik (Rechnen mit Zahlen von begrenzter Genauigkeit).

In dem Worte Approximationsmathematik soll keine Herabsetzung dieses Zweiges der Mathematik liegen, wie sie denn auch nicht eine approximative Mathematik, sondern die Mathematik der approximativen Beziehungen ist. Wir haben erst die ganze Wissenschaft, wenn wir die beiden Teile umfassen.

Die Approximationsmathematik ist derjenige Teil unserer Wissenschaft, den man in den Anwendungen that

sächlich gebraucht; die Präzisionsmathematik ist zu-sagen das feste Gerüst, an dem sich die Approximationsmathematik emporrankt.

Ich illustriere zunächst diese Zweiteilung der Mathematik an dem Zahlenrechnen, bei dem der genannte Gegensatz nicht durch verwickelte psychologische Verhältnisse verdunkelt wird, sondern unmittelbar hervortritt.

In der Präzisionsmathematik operieren wir mit genauen Zahlen, wie sie oben durch endliche oder unendliche Dezimalbrüche definiert wurden. Wie läßt sich nun in der Sprache der Präzisionsmathematik eine ungenaue Zahl $\bar{x}$, sagen wir $x = 6{,}437\,528\,4\ldots$ bis auf 7 Dezimalen bezeichnen? Die Mathematik hat bereits aus dem 18ten Jahrhundert das Funktionszeichen E als Abkürzung des französischen Wortes „entier"; $E(x)$ ist die größte ganze Zahl, die in x enthalten ist.[1] Mit Hülfe dieses Zeichens drückt sich obige Zahl offenbar als $\frac{E(1000\,000\,0\,x)}{1000\,000\,0}$ aus, sodaß wir also beim Rechnen mit siebenstelligen Dezimalen statt mit der genauen Zahl x mit der Zahl $\frac{E(1000\,000\,0\,x)}{1000\,000\,0}$ operieren. Nehmen wir die Ideenbil-

---

1/ Bricht man den Dezimalbruch nicht einfach ab, sondern rundet ihn auf, so behält alles seine Gültigkeit, wenn man $E(x)$ als die im Intervalle $-\frac{1}{2}+x$ bis $\frac{1}{2}+x$ enthaltene größte ganze Zahl definiert.

dungen der Präcisionsmathematik als Maassstab, so können wir hiernach sagen:

Wir arbeiten bei dem approximativen d. h. dem wirklichen Zahlenrechnen gar nicht mit den abstrakten Zahlen x, sondern mit den den abstrakten Zahlen x zugehörigen E-funktionen.

Ganz ähnlich liesse sich der Unterschied zwischen empirischer und abstrakter Geometrie, oder vielmehr die Beziehung der empirischen Geometrie zur abstrakten bezeichnen.

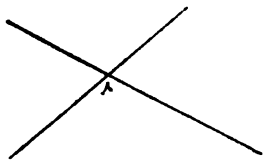
Zunächst von dem Charakter der praktischen Geometrie. Es ist dies diejenige Geometrie, mit der wir es zu thun haben, wenn wir conkrete räumliche Verhältnisse bedenken wollen, also beim Zeichnen und Modelliren, sowie beim Vermessungswesen. Hierbei sind alle Operationen nur bis zu einer gewissen Schwelle genau. Daher wird man Grundsätze folgender Art aufstellen:

Ein Punkt in diesen Disciplinen ist ein Körper, der so kleine Ausdehnungen hat, dass wir von ihnen absehen.

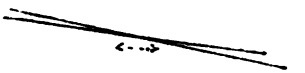
Eine Curve, insbesondere eine gerade Linie, ist eine Art Streifen, bei dem die Breite hinter der Länge zurücktritt.

Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade um so genauer

je weiter sie auseinanderliegen. Liegen sie dicht beieinander, so sind sie zur Festlegung der geraden Linie sehr ungeeignet.



Zwei gerade Linien bestimmen einen Schnittpunkt um so genauer, je größer der Winkel ist, den sie mit einander einschließen. Wenn der Winkel kleiner und kleiner wird, wird der Schnittpunkt immer mehr ungenau.



Nun aber die <u>abstrakte Geometrie</u>: Hier kennen wir solche unbestimmte Aussagen nicht. Das liegt daran, daß die abstrakte Geometrie damit beginnt, diejenigen Dinge, die in der praktischen Geometrie annähernd wahr sind, in absoluter Form als Axiome an die Spitze zu stellen. Hier liegt also eine ganz entscheidende Gedankenwendung vor. Es werden Beziehungen, die in praxi nur approximativ richtig sind, als streng richtig postuliert und auf Grund der so verabredeten „Axiome" in der abstrakten Geometrie Folgerungen durch rein logisches Raisonnement gezogen. Hier lauten dann die <u>Grundsätze</u>:

Ein Punkt hat keine räumliche Ausdehnung.
Eine Linie hat nur Länge.
Zwei Punkte haben eine völlig bestimmte Verbindungs-

gerade.

Zwei gerade Linien, die sich kreuzen, haben stets einen bestimmten Schnittpunkt.

Worauf ich nun in diesem Zusammenhange Ihre besondere Aufmerksamkeit zu lenken habe, ist die Verbindung zwischen diesen beiden ganz verschiedenen Arten der Geometrie (entsprechend dem Übergange, der eben in der Arithmetik durch Einführung der E-funktion bewerkstelligt wurde). Dass eine solche Verbindung besteht, wird stillschweigend von Jedermann zugegeben. Er wendet, obwohl die abstrakte Geometrie in ihren Grundlagen über die Bedingungen der praktischen Geometrie hinausgeht, die Ergebnisse der abstrakten Geometrie immer auf praktische Verhältnisse an. Soll dies in rationeller Weise geschehen, so ist nötig, dasjenige zu entwickeln, was die Fehlertheorie der praktischen Beobachtung genannt wird. Man sagt: Jede Beobachtung oder praktische Bethätigung ist mit einem Fehler behaftet; richtiger würde man wohl sagen: Jede Beobachtung legt im Sinne der abstrakten Geometrie nicht bestimmte Grössen, sondern nur Spielräume für Grössen fest. Und die Frage, in welcher Form die abstrakte Geometrie in der praktischen Geometrie ihre Anwendung findet, beantwortet sich dann so.

Man hat zu untersuchen, innerhalb welcher Grenzen das Resultat der mathematischen Überlegung sich abändert, wenn man die Daten, die der Überlegung zu Grunde liegen, als innerhalb ihres Spielraums variabel ansehen will.

Ich gehe nun zum Ausgangspunkte dieser ganzen Betrachtung zurück, wo wir davon sprachen, daß wir die Zahlen als Punkte einer Abscissenaxe deuteten und hinzufügten, daß dieses praktisch nur mit beschränkter Genauigkeit geschehen kann. Wollen wir genaue Übereinstimmung haben, so kann dies nur durch ein Axiom geschehen.

Wir postulieren, daß jede abstrakte Zahl x (genau im Sinne unserer obigen Definition) einem und nur einem Punkte der Abscissenaxe und ebenso jedem Punkt x eine und nur eine Zahl zugehören soll.

Dieses Postulat ist die Grundlage für die analytische Geometrie, sofern wir dieser präcisionstheoretischen Charakter beilegen wollen, sagen wir kurz für die Präzisionsgeometrie. Nun bestreite ich nicht, daß die Anschauung uns treibt, eine solche Festsetzung zu treffen, ich behaupte aber, daß wir mit unserer Festsetzung über die Anschauung hinausgehen. Was ich damit meine, mache ich an zwei Beispielen klar, die

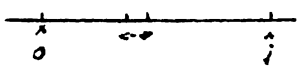
ich aus dem Gebiete der sog. „Mengenlehre" nehme, die in der heutigen Mathematik bekanntermaßen eine bedeutsame Rolle spielt (Menge, franz. ensemble, engl. aggregate)*).

Eine Zahlenmenge und also infolge unserer Definition auch eine Punktmenge (welche der Abscissenaxe angehört) ist ein Inbegriff irgendwelcher Zahlen und Punkte x, so definiert, daß wir von jeder vorgegebenen Zahl oder jedem Punkte x entscheiden können, ob er zu dem Inbegriff gehört oder nicht.

Lassen Sie uns zwei einfache Punktmengen als Beispiele wählen:

a) alle rationalen Zahlen oder Punkte $x = \frac{m}{n}$ von 0 bis 1.

Diese liegen auf der Strecke $\overline{01}$ „überall dicht". Nehmen Sie ein noch so kleines Teilintervall, so enthält es immer noch rationale Zahlen in unendlicher Zahl, und doch ist diese Strecke (wenn eine so grobe Ausdrucksweise statthaft ist) noch durchlöchert wie ein Sieb, da ja unbeschränkt viele irrationale Zahlen, die nach der Definition unserer Punktmenge nicht



*) „Die Mengenlehre der modernen Mathematik kann geradezu als eine Lehre von der unabhängigen Variablen aufgefaßt werden."

angehören, noch auf ihr Platz finden sollen! Hier frage ich: Kann man sich dies räumlich vorstellen, eine überall dichte Punktmenge, die das Continuum noch nicht erschöpft? Die abstrakte Definition ist klar, die Vorstellung jedenfalls für mich unmöglich.

b) alle Zahlen von 0 bis 1 mit Ausschluß der Grenzen 0 und 1, d.h. eine Strecke, von der die Endpunkte abgetrennt sind.

Unsere räumliche Vorstellung scheint uns doch zu lehren, daß man keine Strecke aufhören lassen kann ohne das Ende auch wirklich der Strecke zuzuzählen. Also auch den Inbegriff aller Zahlen von 0 bis 1 mit Ausschluß der beiden Grenzpunkte wird man sich räumlich kaum vorstellen können, so gewiß damit eine wohl definierte Menge gegeben ist.

Diese Bemerkungen haben eine wichtige methodische Folge, die ich so formuliere:

Da die Gegenstände der abstrakten Geometrie nicht als solche von der räumlichen Anschauung scharf erfaßt worden, kann man einen strengen Beweis in der abstrakten Geometrie nie auf bloße Anschauung gründen, sondern muß auf eine logische Ableitung aus den als exakt vorausgesetzten Axiomen zurückgehen.[1]

---

1) Dieser Forderung wird heutzutage vermutlich

Darum behält aber auf der andern Seite die Anschauung auch in der Präzisionsgeometrie ihren großen und nicht durch logische Überlegungen zu ersetzenden Wert. Sie hilft uns die Beweisführung leiten und im Überblick zu verstehen, sie ist außerdem eine Quelle von Erfindungen und neuen Gedankenverbindungen. Man vergl. hier die Antrittsvorlesung:

O. Hölder: Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig 1900.

Ich habe in dem Vorigen den Unterschied zwischen Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik betont und hervorgehoben, daß erst beide zusammen die ganze Wissenschaft ergeben. Der Fehler, an welchem der heutige Betrieb der Wissenschaft krankt, ist der, daß sich die Theoretiker zu einseitig mit der Präzisionsmathematik beschäftigen, während die Praktiker die Approximationsmathematik gebrauchen, ohne mit der Präzisionsmathematik Fühlung zu haben.

Den in Betracht kommenden Gegensatz von Theoretiker und Praktiker will ich noch an einem weiteren Beispiele erläutern, welches ich dem üblichen Un-

---

jeder theoretische Mathematiker gutstimmen; überzeugend scheint mir dieselbe aber in der That erst, wenn sie so, wie im Texte geschehen, aus der Eigenartigkeit unserer räumlichen Auffassung begründet wird.

terrichtsbetriebe der elementaren Geometrie entnehme.

Die Elementargeometrie wird seit Euklid vorwiegend als Präzisionsmathematik betrieben und es werden bei ihr also gewisse Axiome (die als genau postuliert werden) an die Spitze gestellt, aus denen dann rein logisch neue Sätze und Beweise abgeleitet werden. Die Folge ist, daß Unterscheidungen nötig werden, die über die Anwendungen hinausgehen.

In dieser Beziehung erwähne ich zuerst den Unterschied zwischen commensurablen und incommensurablen Strecken.

Bemerken Sie, daß wenn wir mit beschränkter Genauigkeit beobachten, dieser Unterschied überhaupt fortfällt. Z.B. ist die Diagonale des Einheitsquadrates $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$. Wir können diesen Dezimalbruch in Annäherung mit $14/10$, $141/100$, $1414/1000$ bezeichnen d.h. ihn durch den Quotienten zweier ganzer Zahlen soweit annähern, wie ein noch so kleiner gegebener Schwellenwert verlangt. Setzen wir den Schwellenwert z.B. gleich $1/10^6$, so ist damit jegliches praktische Bedürfnis der messenden Geometrie gedeckt. Darüber hinauszugehen hat nur theoretisches Interesse. Also:

Der Unterschied von commensurabel und incommensurabel in seiner strengen Form (und also der

Begriff der Irrationalzahl gehört ausschließlich der Präzisionsmathematik an.

In welchem Sinne wird aber der Praktiker die Worte: commensurabel und incommensurabel gebrauchen, wenn er sie nicht völlig aus seinem Sprachschatze verbannen will?

Ich denke im Augenblick wesentlich an die Astronomen, und speziell an ihre Störungstheorieen. Nehmen Sie z. B. die Einwirkung des Jupiter auf einen kleinen Planeten, etwa Pallas. Was meint der Astronom damit, wenn er das Verhältnis der Umlaufszeiten von Pallas und Jupiter commensurabel nennt? Was die Umlaufszeit eines Planeten ist, läßt sich wegen der Störungen verschiedenster Art, die dabei in Betracht kommen, von vornherein nur mit beschränkter Genauigkeit d. h. in den üblichen Einheiten ausgedrückt nur bis auf eine bestimmte Anzahl Decimalen genau angeben. Wenn also der Astronom sagt: 2 Planeten haben commensurable Umlaufszeiten, so kann er damit nur meinen, daß sich die gefundenen Umlaufszeiten wie zwei kleine ganze Zahlen verhalten; im Falle des Jupiter und der Pallas wie 18:7. Wäre das bei irgend einer Beobachtung oder Rechnung gefundene Verhältnis

über g. L. 180000 : 73271, so würde man die Umlaufzeiten nicht mehr commensurabel nennen, da wir mit so grossen Zahlen bereits die Grenze überschritten haben, innerhalb deren eine Definition des Wortes Umlaufszeit gegeben werden kann.

Gehen wir nun an der Hand des Euklid weiter und stellen uns die Frage:

Ist eine vorgelegte Aufgabe durch Zirkel und Lineal lösbar d.h. führt eine endliche Anzahl Anwendungen der genannten Instrumente zu einer Lösung?

Auch hier müssen wir antworten:

Die Frage, ob eine Strecke durch Zirkel und Lineal construierbar ist, gehört ebenfalls in den Bereich der Präcisionsmathematik; sie bezieht sich darauf, ob unter Voraussetzung der Axiome eine genaue Lösung möglich ist.

In dieser Hinsicht hat das Altertum uns bekanntlich 3 fundamentale Aufgaben als vermutlich unlösbar hinterlassen, deren Unlösbarkeit dann in der That von der Neuzeit bewiesen wurde. Es sind dies:

a) die Dreiteilung eines beliebigen Winkels,
b) die Verdoppelung des Würfels d.h. die Construk-

-kion von $\sqrt[3]{2}$,

c) <u>die Quadratur des Kreises</u> d. h. die Konstruktion der Zahl $\pi = 3,1415926\ldots$ aus der Einheitsstrecke.

Worauf ich an gegenwärtiger Stelle aufmerksam zu machen habe, ist, daß die ganze Behauptung: es sei unmöglich die Aufgaben a) - c) durch eine endliche Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals zu lösen, der Präzisionsmathematik und nicht der Approximationsmathematik angehört. Praktisch kann man jede der Aufgaben mit beliebig bedrängter Genauigkeit mit Zirkel und Lineal lösen. So läßt sich z. B. leicht durch Konstruktion des einem Kreise ein- und umgeschriebenen Vielecks annähern; es sind aber auch weit einfachere und oft sehr annähernde Approximationen gegeben. Auch ist das rein praktische Verfahren oft am Platze. Um praktisch einen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, wird man solange probieren bis die Teilung mit hinreichender Genauigkeit glückt, eine Methode, die praktisch viel besser ist, als wenn man bis auf einige Dezimalen erst die Sache ausrechnet und dann die Lösung in die Figur einträgt; (vergl. die Konstruktion der Kreisteilungsmaschinen).

Übrigens nenne ich zur ersten Orientierung über

die genannten 3 Aufgaben, bez. über die Beweise betreffend die Unmöglichkeit der elementaren Auflösung vergl. meine Kleine Schrift:

F. Klein: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik, Leipzig 1895.

Ich knüpfe nunmehr wieder an unsere Entwickelungen über die Punktmengen an. Wir waren zu dem Schlusse gekommen, daß wir bei Beweisen der Präzisionsmathematik uns nicht kurzweg auf die Anschaulichkeit berufen dürfen, so wichtig die Figur sein mag, um uns über die generellen Voraussetzungen des jeweiligen Beweises zu orientieren. Ich gebe jetzt zwei sehr einfache Sätze über Punktmengen, bei denen dies bereits zur Geltung kommt; es wird darauf ankommen zu verstehen, was die bezüglichen Beweise eigentlich leisten.

1) Es sei eine Punktmenge gegeben, die nicht über den auf der Abscissenaxe festgegebenen Punkt A hinausgeht (sie braucht nicht bis zu A heranzugehen). Die Behauptung lautet dann: Es giebt einen daran Grenzpunkt der Menge.

2) Es sei eine Punktmenge gegeben derart, daß zwischen A und B unendlich viele Punkte der Menge liegen,

so giebt es zwischen A und B sicher eine Verdichtungsstelle d.h. eine Strecke, an der sich die Punkte der Menge unbegrenzt häufen.

Wenn man zuerst solche Sätze hört, so erscheinen einem dieselben vielleicht selbstverständlich. Allerdings sind sie selbstverständlich, aber in dem höheren Sinne, der die Summe aller mathematischen Einsicht ist, dass nämlich die Mathematik im Grunde überhaupt die Wissenschaft von den selbstverständlichen Dingen ist. Wir wollen und können bei unseren Sätzen nichts Überraschendes bringen, sondern haben nur deutlich zu sehen, wie sich die Sätze klar an den Zahlbegriff anschließen, den wir bei unseren Entwickelungen an die Spitze gestellt haben:

Wie ist es mit unserm ersten Satz?

Die Punktmenge ist wohldefiniert d.h. wir können von einem Punkte entscheiden, ob er der Menge angehört oder nicht. Es kann nun sein, dass ein Punkt, der wirklich die größte Abscisse hat, der Menge angehört, dann repräsentiert er ohne weiteres die gesuchte obere Grenze. Es kann aber die Menge auch so beschaffen sein, dass kein oberster Punkt vorhanden ist d.h. sie repräsentiert uns, wenn wir ihre Punkte nach der Größen der Abscissen ordnen, eine stets wachsende Menge, hat aber,

trotzdem sie nicht über einen gewissen Punkt A der Abscissenaxe hinausgeht, kein Maximum. (Ein Beispiel ist die von uns bereits betrachtete Menge aller Punkte zwischen 0 und 1 mit Ausschluss der Grenzen). In diesem Falle werden wir unter dem Grenzpunkt einen Punkt verstehen, der selber der Menge nicht angehört, unterhalb dessen aber in beliebiger Nähe noch Punkte der Menge liegen. Nennen wir den Punkt x und die kleine Strecke ε, so können wir auch sagen:

Der Punkt x heißt der obere Grenzpunkt, auch wenn er selbst der Menge nicht angehört, falls nur im Intervall x und x–ε, wie klein auch ε sein mag, immer noch Punkte der Menge gefunden werden.[1]

Nachdem wir uns hierüber verständigt, holen wir unsere Definition des Zahlbegriffs (die wir an die Idee des unendlichen Dezimalbruches anknüpfen) herein und verfahren folgendermaßen:

Um den Grenzpunkt, den wir suchen, zu definieren, untersuchen wir zunächst, welche ganze Zahlen von Punkten der Menge überschritten werden, welche nicht. Dies ist möglich, da wir die Menge als wohldefiniert voraussetzen. a sei die größte ganze Zahl die

---

[1] Da ε beliebig klein sein darf, so werden zwischen x und x–ε bei gegebenem ε dann noch unendlich viele Punkte der Menge liegen.

noch überschritten wird, sodaß $a+\frac{i}{10}$ nicht mehr überschritten wird.

Nunmehr teilen wir dies Intervall in 10 gleiche Teile und erhalten so die Zahlen:

$$a;0 \quad a;1 \quad a;2 \quad \ldots\ldots \quad a;9 \quad a+\tfrac{1}{10};0$$

Wir vergleichen diese Zahlen mit den Punkten unserer Menge und finden wieder eine größte Zahl $a;b$, die noch überschritten wird, sodaß $a;b+\frac{1}{10}$ nicht überschritten wird.[1]

Wir teilen das so erhaltene kleinere Intervall abermals in 10 Teile und haben:

$$a;b,0 \quad a;b,1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad a;b,9 \quad a;b+\tfrac{1}{10},0.$$

Hier wiederholen wir dieselbe Operation und erhalten zwei Zahlen $a;b,c$ und $a;b,c+\frac{1}{10}$.

Man sieht, wie der Prozeß weiter geht und wie wir auf diese Weise das Intervall stets einengen d.h. 2 Zahlen erhalten, die in immer mehr Dezimalen übereinstimmen und somit — nach der von uns gemachten Voraussetzung — schließlich als identisch angesehen sind. Wir legen also gesetzmäßig einen in allen wesentlich vielen Ziffern definierten Dezimalbruch fest, der uns den Grenzpunkt repräsentiert. Ich fasse vielleicht den Gedanken des Beweises so kurz zusammen:

---

[1] Es kann $b=9$ sein, sodaß $a;b+1 = a+\frac{1}{10};0$ ist.

Nachdem wir einmal die allgemeine Zahl durch einen in allen unendlich vielen Ziffern festgelegten Dezimalbruch definiert haben, geht unser Beweis jetzt darauf hinaus zu zeigen, daß der Grenzpunkt, dessen Existenz behauptet wird, in der That durch einen solchen exakten Dezimalbruch berechnet werden kann.

Für diese hier benutzte Zweiteilung der endlichen Dezimalbrüche hat R. Dedekind, der 1872 zum ersten Male die scharfen Begriffsbestimmungen ins Gebiet der irrationalen Zahlen herausgearbeitet hat, in seiner Broschüre zu den klassischen Werken zahlentheoretischer Arbeit:

R. Dedekind: Stetigkeit und Irrationalzahlen, Braunschweig 1872

das charakteristische Wort „Schnitt" eingeführt. Da legt genau dasselbe den allgemeinen Zahlbegriff durch einen Schnitt fest, denn er ins Gebiete der rationalen Zahlen macht, indem er auf die eine Seite die rationalen Zahlen nimmt, welche von der zu definierenden Zahl übertroffen werden, auf die andere Seite die rationalen Zahlen, welche nicht übertroffen werden.

Diese Idee des Dedekind'schen Schnittes kommt allerdings hier bei uns nicht in ihrer rein abstrakten Formulierung zur Geltung, da wir – hierin von Dedekind abweichend – der Einfachheit halber die De-

finition der Zahl an ihre Darstellung durch einen Dezimalbruch anschlossen. Im Übrigen rekapitulire ich den Gedanken unseres Beweises so:

Wir beweisen die Existenz des oberen Grenzpunktes, indem wir das Mittel angeben, ihn als exakten Dezimalbruch wirklich herzustellen.

Bei dem zweiten Satze, der von K. Weierstraß wegen seiner Bedeutung für die Funktionentheorie stets besonders in seinen Vorlesungen hervorgehoben wurde, thun wir der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn wir die Grenzen, zwischen denen die aus unendlich vielen Punkten bestehende Punktmenge mindestens eine Verdichtungsstelle haben soll, als die beiden aufeinander folgenden ganzen Zahlen a und a+1 annehmen. Bezeichnen wir die Verdichtungsstelle mit x_0 und mit ε eine beliebig kleine Größe, so ist die Definition der Verdichtungsstelle:

x_0 heißt eine Verdichtungsstelle, wenn zwischen $x_0-\varepsilon$ und $x_0+\varepsilon$, wie klein auch ε sein mag, immer noch unendlich viele Punkte der Menge liegen.*)

Wir führen den Beweis unseres Satzes wieder in der Weise, daß wir einen Dezimalbruch x_0, der die verlangte Eigenschaft hat, wirklich herstellen, oder vielmehr

*) Wir können auch sagen (was auf dasselbe hinauskommt): „immer noch Punkte der Menge liegen".

uns überlegen, wie wir ihre in jedem concreten Fälle herstellen können.

Wir teilen zunächst das Intervall a bis a+1 wieder in 10 gleiche Teile:

$$a;0 \quad a;1 \quad a;2 \quad \ldots\ldots \quad a;9 \quad a+1;0$$

und überlegen uns, daß mindestens in einem dieser Intervalle von den unendlich vielen Punkten unserer Menge unendlich viele Punkte liegen. (Es scheint dies keiner besonderen Begründung zu bedürfen, sondern logisch evident zu sein). Das betreffende Intervall sei $a;b \quad a;b+1$. Für dieses nur $^1/_{10}$ des ursprünglichen betragende Intervall wiederholen wir denselben Schluß, nachdem wir zuvor auch hier 10 Teilintervalle

$$a;b,0 \quad a;b,1 \quad \ldots\ldots \quad a;b,9 \quad a;b+1,0$$

gebildet haben. Das so erhaltene Intervall ($^1/_{100}$ des ursprünglichen), in dem noch unendlich viele Punkte unserer Menge liegen, sei $a;b,c \quad a;b,c+1$. Sie sehen wie wir zu immer kleineren Intervallen kommen und schließlich ein Intervall x_0 erhalten, dessen Grenzen wir beliebig wenig von einander unterscheiden. Dieses Intervall nennen wir die Zahl x_0 und der zugehörige Punkt x_0 heißt dann ein Verdichtungspunkt. Sie bemerken also auch hier:

Die Existenz eines Verdichtungspunktes x_0 wird

in der Weise gezeigt, daß man das x_0 durch einen nach bestimmten Regeln verlaufenden Prozeß als Dezimalbruch gewinnt, womit wir auf unsere Grunddefinition der Zahl als einen in allen seinen Stellen bestimmten Dezimalbruch zurückfallen.

Diese beiden hier herangezogenen Sätze über Punktmengen sollten Ihnen ein Beispiel dafür sein, was das für Dinge sind, die die Präzisionsmathematik schon im Bereiche einer einzelnen unabhängigen Variablen behandelt, und die hier die Beweise zu führen sind, wo wir vermöge der von uns festzuhaltenden absoluten Genauigkeit nach der von mir vertretenen Auffassung über die Anschauung hinausgehen. —

Alles Bisherige bezog sich nur erst auf die Definition der unabhängigen Veränderlichen x. Gehen wir jetzt zu den

I, 2 Funktionen $y = f(x)$ von x.

Funktionen $y = f(x)$

über und fragen uns, was ist hier vom Standpunkte der Präzisionsmathematik, was vom Standpunkte der Approximationsmathematik zu sagen.

Die allgemeinste Definition der Funktion über

die wir in der modernen Mathematik verfügen, beginnt damit, festzulegen, welche Werte die unabhängige veränderliche x annehmen soll. Wir setzen fest, x soll eine gewisse „Punktmenge" durchlaufen (wobei die Sprechweise also geometrisch ist, aber durch das centrale geometrische Axiom (pg. 17) festgelegt ist, was damit arithmetisch gemeint ist).

y heißt dann eine Funktion von x ($y = f(x)$) innerhalb der Punktmenge, wenn zu jedem x der Menge ein bestimmtes y gehört (dabei x und y als scharf definierte d.h. als Dezimalbrüche mit wohldefinierten Ziffern gefaßt).

Gewöhnlich ist die Menge, die x durchläuft, das Continuum d.h. sämtliche Punkte zwischen 2 festen Punkten m und n. Man nennt in anderer Sprechweise ein solches Continuum ein Intervall mn. Wir erhalten damit die ältere Definition einer Funktion, wie sie z.B. P.G. Lejeune-Dirichlet gebrauchte:

y heißt eine Funktion von x in einem Intervall, wenn zu jedem Zahlenwerte x, der in dem Intervalle liegt, ein wohldefinierter Zahlenwert y zugehört.

Dies wäre die allgemeinste Definition des Funktionsbegriffes in der Präzisionsmathematik. Wiederum verweise ich auf ein Referat von A. Pringsheim in der mathematischen Encyklopädie:

A. Pringsheim: Allgemeine Funktionentheorie,

Encyklop. der math. Wiss. Bd. 2, pg. 1 ff,
wo in schöner Weise dargestellt ist, wie die allgemeine Definition der Funktion zur Geltung gekommen ist.

Was ich nun auf der andern Seite über den Funktionsbegriff in der empirischen Mathematik zu sagen gedenke, habe ich bereits vor 30 Jahren in meiner oben (am Schlusse der Einleitung) citierten Arbeit über den allgemeinen Funktionsbegriff dargelegt. Sie können das hier unmittelbar Folgende als eine Ausführung der damals skizzierten Ideen ansehen.

Der einzige Autor, der in Lehrbüchern ähnliche Ideen entwickelt, ist M. Pasch[1], der 1882 zwei Schriften veröffentlichte, in denen trotz ihres geringen Umfanges sehr interessante Überlegungen vorkommen. Es sind dies:

M Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, (wo er mit den empirisch gegebenen Punkten und Geraden beginnend zu abstrakten Formulierungen aufsteigt),
und namentlich:

---

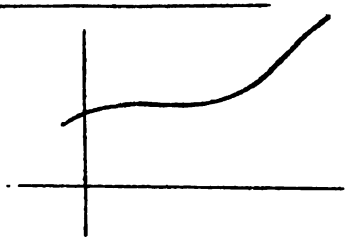
[1] P. du Bois-Reymond handelt in seiner „Allgemeinen Funktionentheorie, Tübingen 1882" zwar auch fortgesetzt von dem Unterschiede der „idealistischen" und der „empiristischen" Auffassung (der er auf die Raumanschauung als solche überträgt), nimmt dann aber keine positive mathematische Wendung, sondern verliert sich in der Auseinanderlegung der von dort aus nach seiner Meinung entspringenden Antinomieen.

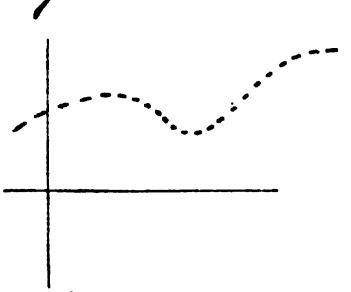
M. Pasch: Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1882. Dieses Buch möchte ich anläßlich meiner Vorlesung Ihrer Aufmerksamkeit ganz besonders empfehlen; man vergleiche auch die parallellaufenden Erläuterungen von Pasch in Mathematischen Annalen Bd. 30 (1887), pg. 130–131.

Nach diesem litterarischen Excurs fragen wir:

Wie mag uns in der empirischen Geometrie eine solche Gleichung $y = f(x)$ entgegentreten?

Wir legen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem fest und fragen, wie weit uns y als Funktion von x durch eine Curve gegeben ist, die wir uns entweder durch einen continuierlichen Federstrich gezeichnet oder uns auch durch einen Registrierapparat (der etwa die Temperatur als Funktion der Zeit liefert) gegeben denken. Übrigens können wir uns eine Curve auch festlegen, indem wir gar keinen continuierlichen Zug machen, vielmehr discontinuierlich einzelne Punkte aneinanderreihen. Allerdings erscheint uns aus der Nähe gesehen das Punktaggregat als discontinuierlich, trotzdem aber haben wir das Gefühl, daß uns dasselbe eine ganz bestimmte Curve festlegt, und aus der Ferne





betrachtet glauben wir sogar eine continuierliche Curve zu sehen.

Was uns hier an einem einfachen Beispiele entgegentritt, ist übrigens eine Eigentümlichkeit unseres Gesichtssinnes, die auch sonst zur Geltung kommt. Blicken Sie z. B. auf einen entfernten Wald, aus dem nicht gerade einzelne Bäume besonders hervorragen, so meinen Sie einen continuierlichen Contour zu sehen, ebenso setzen Sie diese Eigentümlichkeit unseres Sehens voraus, wenn Sie von einem Umriss eines behaarten menschlichen Kopfes sprechen. Wir müssen also sagen:

Eine grosse Anzahl kleiner Gegenstände dicht beieinander gesehen lässt in uns die Vorstellung des Continuums entstehen.

Ich hatte vorhin von einem continuierlichen Federstrich gesprochen. Wenn wir ihn aber mit einem genügend scharfen Mikroscop betrachten würden, würde er sich als aus vielen kleinen Flecken zusammengesetzt erweisen. Wir haben also unserm letzten Satze noch hinzuzufügen:

Auch wenn wir glauben ein Continuum vor uns zu haben, wird uns die genauere Betrachtung häufig überzeugen, dass wir nur die dichte Aufeinanderfolge kleiner Teilchen betrachten.

Ich habe diese Eigentümlichkeit hier zunächst nur

bei der Gesichtswahrnehmung neben einander liegender Gegenstände zur Sprache gebracht. Sie gilt aber auch bei zeitlich auf einander folgenden Wahrnehmungen. Die Thatsache, daß in kurzen Intervallen auf einander folgende Gesichtseindrücke sich verschmelzen, als ob ein Continuum vorliege, beobachten wir besonders schön beim Kinematographen oder Mutoscop.

Zu untersuchen, wie dies zu erklären ist, ist Sache der Physiologen und Psychologen. Ich will hier nur erwähnen, daß die Elemente unserer Netzhaut aus discontinuierlich an einander gereihten Nervenstäbchen bestehen, und daß wahrscheinlich jedes einzelne Stäbchen nur einen bestimmten Gesichtseindruck fortpflanzen kann, sodaß also für uns zwischen der Beobachtung eines wirklichen Continuums und einer Menge in hinreichend kleinen Räumen auf einander folgender Dinge kein Unterschied ist. Aber ein wirkliches Urteil darüber, wieweit physiologische und psychologische Untersuchungen über das Zustandekommen des Sehens, über die Struktur der Netzhaut, über die chemischen Veränderungen, die das Licht auf der Netzhaut durch Bestrahlung hervorbringt, über die Dauer dieser Veränderungen u. s. w. gestatten näher in die Thatsachen der sinnlichen Wahrnehmung einzudringen, muß ich selbstverständlich dem Fachmann überlassen. Viele

rufen uns hier nur auf die Thatsache als solche.

Im Anschluß an unsere letzten Ausführungen fragen wir nun:

In welcher Weise wird vermöge einer empirischen Curve y als Funktion von x bestimmt?

Wir antworten: x und y sind beide nur bis auf einen Schwellenwert genau festgelegt. Daher:

Die empirische Curve legt y nicht als scharfe Funktion von x fest, sondern definiert das einem x zugehörige y nur mit einem begrenzten Grade von Genauigkeit.

Wir schreiben dies etwa:

$y = f(x) \pm \varepsilon$, wo das unbestimmt bleibende ε (das wir uns gegebenenfalls wieder als eine Funktion von x denken mögen) der Ungleichung genügen wird:

$|\varepsilon| < \delta$ d.h. der absolute Betrag dieser kleinen Größe ε liegt unterhalb des Schwellenwertes δ.

Ein solches Gebilde $y = f(x) \pm \varepsilon$, von gewisser Breite, habe ich in der erwähnten Arbeit (1879) einen „Funktionsstreifen" genannt, sodaß wir auch kürzer sagen können:

Die empirisch gegebene Curve definiert uns nicht eine Funktion, sondern einen Funktionsstreifen.

Wenn also der Verlauf der Funktion durch eine empirisch gegebene Curve nur bis zu einem gewissen Grade genau versinnlicht werden kann, so stellen wir nun

mehr die mehr philosophisch-psychologische Frage in den Vordergrund, die ich schon oben als controvers bezeichnete:

Kann man sich eine Funktion unter dem Bilde einer räumlich angeschauten Curve exact „vorstellen"?

Dies „Vorstellen" einer Curve ist nicht mit der Auffassung des Gesetzes zu verwechseln, nach dem auf Grund der als absolut richtig vorausgesetzten Axiome die Curve scharf definiert werden kann. Vielmehr handelt es sich um die lebendige Erfassung einer concreten Gestalt[1].

Meine Antwort auf die gestellte Frage ist nach dem, was ich oben über die Vorstellbarkeit von Functionscurven auf der Abscissenaxe sagte, nicht mehr überraschend; ich habe sie bereits in der genannten Note von 1873 so formuliert:

Auch wenn man sich eine Curve nicht zeichnet oder mit dem Auge verfolgt denkt, sondern wenn man sie sich nur „vorstellt", hat die Curve eine beschränkte Genauigkeit und entspricht also nicht dem scharfen Functionsbegriff der Präcisionsmathematik, sondern der Idee des Functionsverlaufes.

Die Richtigkeit dieser Auffassung soll weiterhin in der Weise hervortreten, dass ich an der Hand der Axio-

---

[1] i/ Gehirnthätigkeit, bei der die Terminalelemente der Netzhaut nicht direkt beteiligt sind; wohl aber diejenigen Gehirnteile, von denen die Fasern der Netzhaut ausstrahlen.

me die mannigfaltigsten Curven klar definieren werde, die man sich ganz gewiss nicht fertig vorstellen kann (so gewiss man das Gesetz ihrer Erzeugung klar versteht).

Eine entgegenstehende Ansicht ist in der mathematischen Litteratur insbesondere von A. Köpke (Hamburg) in den Math. Ann. 29 (1887) vertreten worden. Ich gehe darauf um so lieber ein, weil ich annehme, dass diese Ansicht, wenn auch nicht in scharf formulierter Form, weit verbreitet ist.

Um den Standpunkt Köpke's verstehen zu können, muss ich etwas vorwegnehmen, was ich später ausführlicher behandeln werde.

Unter den Funktionen giebt es eine besondere Klasse, die der stetigen Funktionen, die wieder als besondere Unterklasse die differentiirbaren Funktionen in sich schliessen. Ist die Differentiation beliebig oft möglich, so heissen die Funktionen unbeschränkt differentiirbar.

Köpke sagt nun, dass wir uns diejenigen Curven $y = f(x)$ genau vorstellen können, deren $f(x)$ nicht nur stetig, sondern auch unbeschränkt differentiirbar ist, dass wir aber auf der andern Seite solche Curven, die stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten entsprechen, uns schlechterdings nicht vorstellen können.

Sie sehen, wie dies von meiner Ansicht abweicht.

Während ich behaupte, daß unsere räumliche Vorstellung an sich und immer ungenau ist, meint Köpke, daß sie völlig ausreichend sei für eine bestimmte Klasse von Funktionen, daß sie aber für andere Funktionen versage.

Man sollte meinen, daß die Physiologen und Psychologen sich mit dieser Frage beschäftigt hätten. Es scheint dies nicht der Fall zu sein, wie denn auch der einzige Autor, der außer Köpke und mir von mathematischer Seite an diese Fragestellung ausführlich herangetreten ist, W. Pasch in seinem bereits genannten Lehrbuche, sowie in den Math. Ann 30 (1887) sein dürfte. So wenig werden die wichtigsten Fragen behandelt, die auf den Grenzgebieten verschiedener Wissenschaften liegen. Im vorliegenden Falle dürfte für die Vernachlässigung der Fragestellung übrigens mit in Betracht kommen, daß die moderne Arithmetisierung der Mathematik (d. h. ihr consequenter Aufbau auf Grund des modernen Zahlbegriffs) außerhalb der mathematischen Fachkreise immer noch wenig gekannt und noch weniger nach ihrer Wichtigkeit verstanden ist.

Um so lieber mache ich hier von mir aus einen kleinen

Excurs über Naturphilosophie,

indem ich die folgende, durch den vorliegenden Zusammenhang gegebene Frage aufstelle:

Wenn wir eine scharfe Funktion $y = f(x)$ weder empirisch realisieren, nicht einmal uns ideell vorstellen können, wie steht es dann mit der Schärfe der sogenannten Naturgesetze? Sind sie exakt oder approximativ?

Nehmen Sie irgend ein Gesetz, wie es die Physik oder die Naturwissenschaft behandelt, z.B. das Fallgesetz:

$$y = g\frac{t^2}{2} + ct + c'.$$

Wie weit ist dieses Gesetz durch die Beobachtung gegeben. Wir müssen auch hier sagen: nur approximativ. Ebenso beschreibt ein seitlich geworfener Körper keine genaue Parabel, ja die ballistische Curve kann beträchtlich von einer Parabel abweichen. Ein Tennisball vermag eine Curve mit einer nach oben gerichteten Spitze zu beschreiben.

Wie kommen wir nun dazu, ein solches Gesetz als absolut genau zu formulieren und die Abweichungen störenden Einflüssen bez. Beobachtungsfehlern zuzuschreiben?

Es kommt hier ein neues Prinzip in Betracht, das sog. Prinzip der Einfachheit der Naturerklärung oder der "Ökonomie des Denkens (Mach), das sich in dem vorliegenden Falle so aussprechen läßt:

Bei der Aufstellung der Naturgesetze greift man (nicht erst auf Grund ausdrücklicher Überlegung, sondern unwillkürlich) nach den einfachsten Formeln, die die Erscheinung mit hinreichender Genauigkeit darzustellen vermögen.

Was hier speziell von den Fallgesetzen gesagt ist, gilt auch für die scheinbar gesichertsten Naturgesetze z. B. die Gesetze von der Konstanz der Masse und Energie.

Bei den meisten Versuchen (besonders chemischen) ist die Masse leidlich constant, in einer Formel ausgedrückt:

$$M = \text{const} + \varepsilon(t),$$

wo $\varepsilon(t)$ eine ihrem Betrage nach sehr kleine Funktion der Zeit ist, über welche man nichts Bestimmtes in Erfahrung gebracht hat.

Analoges gilt für die Energie. Auch sie ist bei den Versuchen leidlich constant, aber von einer absoluten Genauigkeit ist gar nicht die Rede,[1] so daß wir sagen müssen:

Auch unsere allgemeinsten und für die Weltauffassung wichtigsten Naturgesetze sind immer nur in einem beschränkten Bereich mit beschränkter Genauigkeit experimentell bewiesen. Man möchte sagen:

---

[1] Diese Genauigkeit ist sogar bislang einesteils geringer, und jedenfalls sehr viel weniger bedeutsam als bei den Versuchen, durch welche die Constanz der Masse nachgewiesen werden soll.

Die genaue Formulierung der Naturgesetze durch einfache Formeln beruht nur auf dem Wunsche, die äussere Erscheinung durch möglichst einfache Hilfsmittel zu beherrschen.

Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus sollte man bei jedem Naturgesetze — damit dasselbe nicht zu einem Dogma wird d. h. einem Satze, den wir für unumstößlich richtig halten, ohne mehr nach den Beweisgründen zu fragen — allemal die Frage stellen: Innerhalb welcher Genauigkeitsgrenzen ist dasselbe durch die Beobachtung erwiesen? Meist wird man finden, daß dies mit viel weniger Genauigkeit stattfindet, als man gewöhnlich glaubt.

Ich will das Gesagte an einem Beispiele belegen, das ich der Astronomie entnehme, d. h. derjenigen empirischen Wissenschaft, bei der die Genauigkeit am weitesten getrieben ist. Ich beziehe mich dabei auf die autoritative Publikation:

S. Newcomb: The elements of the four inner planets and the fundamental constants of Astronomy, Washington 1895.

In diesem Werke hat Newcomb auf Grund seiner Lebensarbeit über die Bewegung der großen Planeten für sämtliche sog. „astronomische Constanten"

die besten Werte angegeben, welche die heutige Astronomie zu beschaffen weiss, sowie gleichgültig den Spielraum, innerhalb dessen er sie als sicher bestimmt ansieht.

Auf pg. 118–120 äußert er sich darüber, wie genau das Newton'sche Gesetz der gegenseitigen Schwerewirkung zweier Massenteilchen:

$$f = \frac{k m m'}{r^2} \quad (k = \text{feste Constante})$$

durch die Beobachtung bestätigt wird.

Er unterscheidet dreierlei Beobachtungsintervalle:

1) Beobachtungen auf der Erde, wo r zwischen einigen Dezimetern (Laboratoriumsversuchen) und der Länge des Erdradius variiert,

2) Beobachtungen, bei denen das Intervall für r zwischen der Länge des Erdradius und der Sonnendistanz von der Erde liegt (Fallgesetze, Mond- und Erdbewegungen relativ zur Sonne),

3) Beobachtungen, bei denen r bis zu dem 20fachen der Sonnendistanz anwächst (Bewegung der fraglichen Planeten).

Was nun die Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes angeht bez. die Genauigkeit, mit der dies Gesetz innerhalb der verschiedenen Intervalle durch die Beobachtung zweifellos constatiert wird, so setzt Newcomb die Genauigkeit

1/ für das erstgenannte Intervall gleich 1/9,

2/ für das Intervall von der Länge des Erdradius bis zur Sonnendistanz gleich 1/5000,

3/ und für das Intervall bis zu den entferntesten Planeten als völlig unbestimmt und sehr gering an.

Natürlich ist z. B. in dem ersten Intervall diese Genauigkeit nicht so zu verstehen, daß das Gesetz bis auf 1/9 falsch ist, sondern nur so, daß das vorhandene Erfahrungsmaterial einen Fehler bis zu 1/9 möglich erscheinen läßt.

Der Curiosität halber füge ich hier an, daß der amerikanische Astronom Hall um bestimmten Irregularitäten in der Merkurbewegung Rechnung zu tragen, das Newton'sche Gesetz in der folgenden Form ansetzt:

$$f = \frac{konst.}{r^{2,000\,000\,1574}}$$

Nach allem müssen wir also sagen, und damit bestätigt meine Thesis zu Recht:

Die Genauigkeit, mit der die allgemein geltenden Naturgesetze zwingend durch das Experiment bewiesen sind, ist selbst im Falle des Newton'schen Anziehungsgesetzes nur eine sehr beschränkte.

Im Anschluß an diese Ausführungen lassen Sie mich gleich die naturphilosophische Frage zur Sprache bringen, welche die Göttinger philos. Facultät im

dono bereits in der Einleitung genannten Gutachten über die neueste Boneke - Kaisfrage*) behandelt.

Auch hier ist wesentlich von dem Unterschiede zwischen der approximativen Grössenschätzung und der strengen Zahldefinition die Rede. Besonders wird dort aber die Frage nach der intimen Constitution der Materie berührt. (Sie werden bald sehen, wie dies mit unserem engern Gegenstande zusammenhängt).

Bei der Frage nach der intimen Natur der Materie giebt es zwei extreme Ansichten:

1) Die eine will die Materie als wirklich den Raum continuierlich erfüllend ansehen (Continuitätstheorie)

2) die andere als eine Anhäufung getrennter, streng punktförmiger Massen (extreme Atomtheorie).

Die Mehrzahl der Naturforscher stellt heutzutage wohl in der Mitte. Sie sehen die Materie als molecular aufgebaut an, wobei aber die Moleküle nicht als Punkte gedacht werden, sondern als complizierte Wesen für sich, von nicht näher bekannter Beschaffenheit, ruhend im einem Continuum, dem „Lichtäther".

Das erste Extrem wird z.Z. insbesondere von F. Ostwald und seiner Schule vertreten, die jegliche Atomtheorie perhorrescieren. Die zweite Auffassung ging von den französischen Mathematikern der klas-

*) Göttinger Nachrichten 1901, Geschäftliche Mitteilungen und math. Ann. 55 (1901)

sischen Schule, insbesondere Laplace, aus und blieb lange herrschend; z. B. gilt sie 1847 Helmholtz in seiner ersten Abhandlung noch als Zielpunkt. Die Annahme ist dabei, daß die gedachten „Kraftpunkte" mit „Centralkräften" aufeinander wirken. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Anschauungsweise, welche seit Newton in der Astronomie herrschend wurde.

Übrigens ist dies zweite Extrem gelegentlich noch excentrisch gesteigert worden. Man ging von der Frage aus: Sollte nicht ebenso wie der Raum nur discontinuierlich mit Materie gefüllt ist, auch die Zeit discontinuierlich sein? d. h. kann nicht möglicherweise jede Bewegung als in nur discontinuierlichen Zeitintervallen stattfindend, als sprunghaft aufgefaßt werden müssen? Man wird zu dieser Fragestellung geführt, wenn man sich die Wirkungsweise des Kinematographen überlegt, der uns pictorisch discontinuierliche Vorgänge als continuierliche Bewegung vortäuscht. In der That haben neuerdings W. K. Clifford und L. Boltzmann derartige Vorstellungsweisen befürwortet:

W. K. Clifford: On the nature of forces, Roy. Inst. 1870 repr. in Lectures and Essays" I

L. Boltzmann: passim.

Wie können so divergente Ansichten nebeneinander bestehen? Dies ist die berechtigte Frage, bei der das eigentliche Interesse des Mathematikers im diesen Dingen ankebt. Wir müssen sagen:

Die verschiedenen Voraussetzungen werden gegebenenfalls mit Rücksicht auf die ungenaue Natur unserer sinnlichen Wahrnehmung gleich gute Erklärungen abgeben können, weil es sich bei der sinnlichen Wahrnehmung in der That nicht um Beziehungen der Präzisionsmathematik, sondern der Approximationsmathematik handelt.

Die so aufgestellte Formulierung wird gern acceptiert werden. Aber im Grunde nimmt sie das Resultat ernster mathematischer Betrachtung voreweg. Der Mathematiker hat weder die Fähigkeit noch die Aufgabe zu entscheiden, was der Fall der Natur" ist, er muß das, soweit es überhaupt möglich ist, hier zu einem bestimmten Resultate zu kommen, dem berufenen Naturforscher oder Philosophen überlassen. Er kann aber entscheiden und soll entscheiden, wieweit die verschiedenen Prämissen auf Grund geeigneter Voraussetzungen gegebenenfalls nahezu zu denselben Resultaten führen. In den

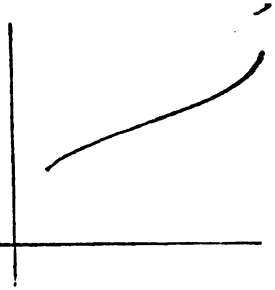
That eine große Aufgabe der Approximationsmathematik!

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wende ich mich wieder einer bestimmten Fragestellung zu:

Jedermann verbindet mit der Idee der empirischen Curve gewisse Attribute, ist es möglich den Begriff der exakten Curve d.h. im vorliegenden Zusammenhange die Funktion $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik so einzuschränken, daß wir analoge Attribute bei ihr wiederfinden?

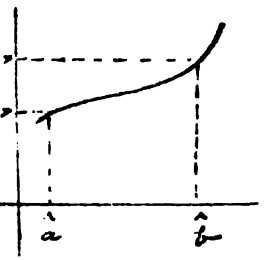
Ich führe die Attribute an welche ich dabei denke, hier der Reihe nach auf:

1/ Eine erstes Attribut, welches wir der empirischen Curve thatsächlich beilegen, ist die Continuität d.h. wir haben die Vorstellung, daß sie in den kleinsten Teilen zusammenhängt.



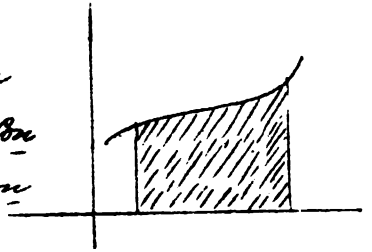
Dem wird entsprechen, daß $f(x)$ durch alle Zwischenwerte geht oder genauer:

Ist $f(a) = A$ und $f(b) = B$, so sollen alle Werte zwischen A und B von $f(x)$ im Intervalle $x = a$ bis $x = b$ wirklich angenommen werden.



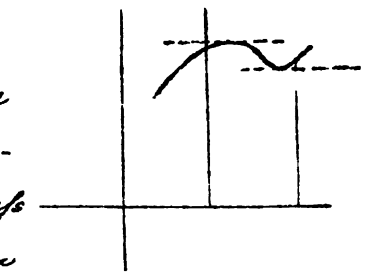
Wir werden lernen, daß die sogenannten „stetigen" Funktionen diese entsprechende Eigenschaft haben.

2/ Das zweite Attribut, das wir dem empirischen Verhalten der Curve entnehmen, ist die Eigenschaft, ihrer Continuität entsprechend einen bestimmten Flächeninhalt abzugrenzen.

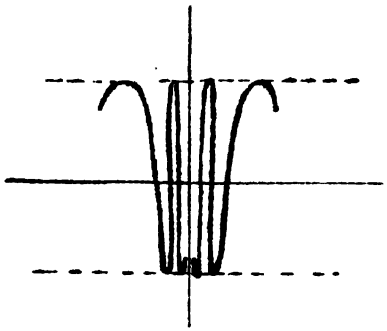


Hieraus ergiebt sich für die stetige Funktion $f(x)$ keine neue Einschränkung. Wir werden vielmehr finden, daß $\int f(x)\,dx$ bei jeder stetigen Function wohldefiniert ist, mit andern Worten, daß jede stetige Function integrierbar ist.

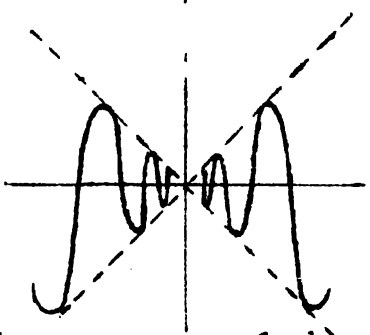
3/ Wir achten nun auf den Allgemeinverlauf der empirischen Curve d.h. auf das Anwachsen resp. Abnehmen der Ordinate und finden, daß eine empirische Curve notwendig in einem endlichen Intervall eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis darbietet.



Die stetige Function $y = f(x)$ schwankt auch zwischen Maximis und Minimis. Diese können aber in einem endlichen Intervall unendlich dicht liegen. Fct z.B. $y = \sin 1/x$, so schwankt die Function in dem Intervall $x = 2/\pi$ bis $x = -2/\pi$ unendlich oft zwischen



$y = +i$ und $y = -i$ hin und her (die Anzahl der Oscillationen wächst bei Annäherung an den Nullpunkt unbeschränkt).



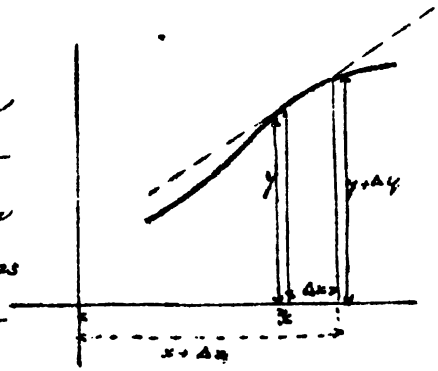
Oder wir wählen $y = x \cdot \sin 1/x$, so hat diese Function wiederum in einem endlichen Intervall zwischen $y = +x$ und $y = -x$ unendlich viele Maxima und Minima. Dies 2te Beispiel hat den Vorzug, dass die Function nicht nur rechts und links von Null, sondern auch im Nullpunkt selbst stetig ist.

Da also bei einer stetigen Function $y = f(x)$ keineswegs ausgeschlossen ist, dass dieselbe in einem endlichen Intervalle unendlich viele Maxima und Minima hat, so müssen wir, wollen wir in dieser Hinsicht eine Übereinstimmung mit der empirischen Curve herstellen, dieses als besondere Bedingung ihr auferlegen. Wir drücken dies später gelegentlich so aus:

Die Function $y = f(x)$ soll im gerade betrachteten Intervalle in eine endliche Zahl monotoner Stücke zerfallen.

4) Wir legen einer empirischen Curve eine

Richtung bei. Was verstehen wir da unter Richtung? Wir wollen hier eine möglichst unbefangene Antwort geben d. h. nichts in die Definition hineinmengen, was wir etwa bereits aus der Differentialrechnung wissen.



Es repräsentiere uns die gezeichnete Curve einen Strom von endlicher Breite d. h. die Ordinate y ist nur bis auf einen Schwellenwert δ bestimmt. (Ist die Breite des Stromes zu bedeutend, so müssen wir das Folgende auf einen Mittelstreifen desselben beziehen). Um nun die Richtung festzulegen, verfahren wir in praxi folgendermassen.

Man nimmt auf der Abscissenaxe ein Stück Δx, welches gross gegen die Breite des Stromes (Streifens) ist, aber klein gegenüber dem Gesamtverlauf des Streifens, sucht für die Abscissenwerte x und x+Δx die Ordinaten y bez y+Δy und verbindet deren Endpunkte durch eine gerade Linie. Diese ist dann natürlich nicht scharf bestimmt, denn die beiden Punkte, die sie verbindet, sind es ja nicht. Aber diese gerade Linie giebt das, was wir in praxi die Richtung des Streifens an der betrachteten Stelle nennen (und was nur mit mässiger Genau-

igkeit bestimmt ist). Wir messen dieselbe durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$[1]. Wir können also kurz sagen:

Eine empirische Curve hat an jeder Stelle eine Richtung, festgelegt innerhalb eines im Einzelfalle zu bestimmenden Spielraums durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, unter Δx eine Größe von bestimmter Größenordnung verstanden, d. h. klein gegenüber dem Gesamtverlauf, groß gegenüber dem Schwellenwert des Kreises. Die empirische Curve stimmt erfahrungsgemäß mit der Verbindungsgeraden von x, y nach $x+\Delta x, y+\Delta y$ annähernd überein.

Hat nun auf der andern Seite jede Stetige Funktion einen Differentialquotienten?

Wir definieren den Differentialquotienten als Limes $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}$ und schreiben dafür abkürzend $\frac{dy}{dx}$, wo die Kleinen d andeuten sollen, daß wir uns den Grenzübergang gemacht denken. Dabei müssen wir aber bedenken, daß der Differentialquotient aus dem gerade besprochenen Differenzenquotienten durch einen doppelten Grenzübergang entsteht, der in ganz bestimmter Reihenfolge vollzogen werden soll, indem wir erstlich die Breite des Kreises und dann das Stück Δx der Abscisse sinnendlich klein werden lassen.

---

[1] Noch allgemeiner könnte man $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ setzen, wo x_1 und x_2 links und rechts von x in geeignetem gegenseitigen Abstand genommen sind.

Als allgemeinen Grundsatz über Grenzübergänge flechte ich hier ein:

Was bei einem Grenzübergang herauskommt, kann a priori schlechterdings nicht gesagt werden, sondern muss jedesmal genau überlegt werden. Insbesondere aber ist bei einer Mehrzahl von Grenzübergängen deren Reihenfolge genau zu beachten.

Indem die Mathematiker früher diesen Grundsatz nicht immer befolgten, glaubten sie an die Existenz eines Differentialquotienten jeder stetigen Funktion. Man weiss aber jetzt seit den Untersuchungen von B. Riemann und K. Weierstrass (um 1860), dass stetige Funktionen als solche gar keinen bestimmten Differentialquotienten zu haben brauchen d.h. dass für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegebenenfalls gar kein solcher Limes, wie wir ihn gerade definierten, existiert. Wir werden das weiterhin noch ausführlicher erläutern.

Wie mag wohl die gegenteilige Ansicht entstanden sein? Es ist nicht bestimmt zu sagen, wo der Fehlschluss lag, da eine richtige Auffassung allemal den Fehler ausschliesst. Vielleicht aber können wir sagen:

Die verkehrte Annahme, dass eine stetige Funktion immer einen bestimmten Differentialquotienten haben müsse, scheint dadurch hervorgerufen, dass man

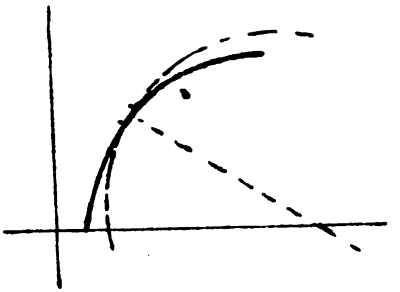
bei unserer empirischen Curve den Schwellenwert und das Stückchen Δx gleichzeitig verkleinert dachte, so zwar, daß das Wesentliche der Figur d. h. die Übereinstimmung der geraden Linie mit der Curve für das Intervall Δx bestehen blieb. (Man hielt also auch bei der strengen Funktion allgemein die Vergleichbarkeit mit einer geraden Linie für ein kleines Stück aufrecht).

Wenn diese Interpretation richtig ist, so liegt der Fehlschluß darin, daß man zwei Grenzübergänge gleichzeitig und sozusagen in gleicher Klasse machte, die vorschriftsmäßig nacheinander zu machen sind.

Wir werden uns die Nichtexistenz des Differentialquotienten bei geeigneten stetigen Funktionen später noch genauer klar machen. Hier genügt es uns zu wissen, daß eine stetige Funktion keinen Differentialquotienten zu haben braucht, so daß wir also, wenn wir in Übereinstimmung mit unserer empirischen Curve, die doch sicher eine Richtung hat, bleiben wollen, die Existenz eines Differentialquotienten der stetigen Funktion als Bedingung auferlegen müssen.

5) Ebenso ist es bei jeder empirischen Curve keine Frage, daß sie eine Krümmung besitzt.

Die Krümmung einer Kurve wird dabei durch den reciproken Wert $1/\varrho$ des Radius ϱ eines Kreises gegeben, der



durch drei zweckmäßig gewählte, sogenannte „aufeinanderfolgende" Punkte der Curve gelegt. Sind die 3 Punkte

$$x, y \quad x+\Delta x,\ y+\Delta y \quad x+2\Delta x,\ y+2\Delta y+\Delta_2 y,$$

so kommt wesentlich für die Krümmung die zweite Differenz $\Delta_2 y$, oder wenn wir durch $(\Delta x)^2$ dividieren, der zweite Differenzenquotient $\frac{\Delta_2 y}{(\Delta x)^2}$ in Betracht. Er gibt das Maß der Abweichung von der geraden Linie ($\Delta_2 y = 0$) beim Kurvenverlauf. Durch Einsetzen der Funktionswerte können wir ihn auch in der Form schreiben:

$$\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Wie werden wir die 3 Punkte praktisch wählen? Nach wieder in solchen Abständen, die gegen die Breite des Streifens groß, gegen seinen Gesamtverlauf klein sind. Die Schärfe, mit der der 2te Differenzenquotient oder demnach die Krümmung bei einem empirisch vorgelegten Streifen gemäß unserer Festsetzung definiert werden kann, ist, weil jetzt 3 Punkte auf dem Streifen verschiebbar sind, jedenfalls geringer als die Schärfe, mit der wir den ersten Differenzenquotienten und damit die Richtung der Curve festlegten.

Diese Unbestimmtheit der Festlegung wächst, wenn wir weitergehen und von dem 3te, 4te ... Differenzenquo-

quotienten reden wollen.

Bei der ebenen Curve müssen wir natürlich wieder, um die Analogie mit der empirischen Curve aufrecht zu erhalten, die Existenz des zweiten und der höheren Differentialquotienten postulieren.

Die Punkte 4) und 5) zusammenfassend folgt also:

Damit diejenigen Attribute, die wir einer empirisch gegebenen Curve betreffend Richtung und Krümmung (erster und höhere Differenzenquotienten) beilegen, bei einer scharf definierten Funktion sich in sinngemässer Weise wiederfinden, werden wir die Funktion nicht nur als stetig und mit einer endlichen Anzahl von Maximis und Minimis im endlichen Intervall behaftet voraussetzen, sondern ausdrücklich annehmen, dass sie einen ersten und eine Reihe höherer Differentialquotienten (soviel man gerade benutzen will) besitzt[1]

---

[1] Man könnte natürlich an die Übereinstimmung noch weitere Forderungen stellen. Bei einer empirischen Curve ist durch die zu einem Punkte gehörige Richtung, Krümmung u.s.w. ein Stück des weiteren Verlaufs vorausbestimmt (was insofern selbstverständlich ist, als wir die zu einem Punkte gehörige Richtung, Krümmung u.s.w. erst aus diesem Verlauf festlegen). Hr. Köpke aus Ottensen [den ich gelegentlich der Hamburger Naturforscherversammlung ausführlich sprach] hält es für zweckmässig, auch diese Vorausbestimmung bei den im ersten Sinne zu betrachtenden Funktionen $y = f(x)$ als eine Forderung festzuhalten. Er kommt dadurch natürlich zu Funktionsklassen, die enger sind als die im Texte betrach

Für das unmittelbar Folgende ist unser Programm durch diese letzten Entwickelungen festgelegt. Wir haben die dort den Curven beigelegten, aus der Erfahrung entnommenen Attribute für die Funktionen $y = f(x)$ vom Standpunkte der Präzisionsmathematik streng zu definieren.

I. Zunächst die Definition der Stetigkeit.

Ich gebe hier historisch an, daß alle diese Definitionen in die Wissenschaft Eingang gefunden haben durch das fundamentale Werk:

A. Cauchy: Cours d'analyse T. I, Paris 1821, /

(in das Cauchy (1789–1857) seine Vorträge an der Ecole polytechnique hineingearbeitet hat).

Unabhängig von Cauchy ist in dieser Hinsicht ein anderer Forscher thätig gewesen, dessen Name erst spät in die größere Öffentlichkeit gedrungen ist. Es ist dies Bolzano (1781–1848) in Prag (seit 1817), über dessen Bedeutung für die Geschichte der Differential- und Integralrechnung man die Arbeit von O. Stolz in den Math. Ann. ~~18 (1881)~~

O. Stolz: Bolzano's Bedeutung für die Infinitesimalrechnung

---

teten. Für die so ausgesonderten Funktionen möchte Hr. Köpcke einen höheren Grad von Anschaulichkeit in Anspruch nehmen als für die anderen. Ich mache demgegenüber natürlich geltend, daß nach meiner Auffassung überhaupt keine Funktionen anschaulich sind, sondern immer nur Funktionsstreifen.

[Zusatz vom 3. Oktober 1901]

. vergleichen möge. Es ist hier wie so oft in der Wissenschaft ergangen. Die historische Entwickelung knüpft nur an einen Namen an, während die Möglichkeit zu einer solchen Entwickelung an mehreren Stellen gleichzeitig gegeben war.

Wie lautet nun die Cauchy'sche Definition der Stetigkeit?

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig in einem Intervall, wenn man um jede einzelne Stelle des Intervalls herum, einen Bereich so abgrenzen kann, daß innerhalb desselben die Schwankung der Funktion kleiner ist, als eine noch so kleine vorgelegte Größe η. Oder in Formeln.

Ist ξ eine hinreichend kleine Größe und

$$|x' - x| < \xi, \text{ so ist } |f(x') - f(x)| < \eta,$$

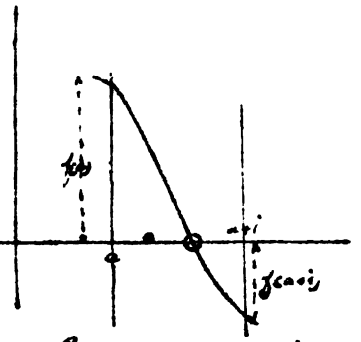
d.h. wenn eine noch so kleine Größe η gegeben ist dann soll man immer eine Größe ξ so wählen können, daß für die Argumentendifferenz kleiner als ξ auch die Funktionsdifferenz kleiner als η ist.

Wir beweisen nun auf Grund dieser Definition, daß eine stetige Funktion in einem Intervall alle Zwischenwerte durchläuft.

Wir beweisen den Satz in einer speziellen Form, bei der aber das allgemeine Prinzip durchleuchtet.

Es möge $f(x)$ an zwei ganzzahligen Stellen $x = a$ und

$x = a+i$ betrachtet werden, dabei sei $f(a) > 0$ und $f(a+i) < 0$. Wir beweisen, daß dann $f(x)$ zwischen a und $a+i$ mindestens einmal durch 0 geht.



Empirisch ist ganz klar, daß eine Curve, wenn sie bei a oberhalb und bei $a+i$ unterhalb der Abscissenaxe verläuft, mindestens einmal die Axe schneidet. Theoretisch müssen wir aber beweisen, daß aus der von uns gewählten Definition der Stetigkeit auf Grund des ein für allemal festgelegten Zahlbegriffs das vorgelegte Theorem sich herleiten läßt. Anders ausgedrückt:

Es handelt sich darum die Zweckmäßigkeit der Cauchy'schen Definition der Stetigkeit zu erproben, indem wir beweisen, daß aus ihr dasselbe Theorem folgt, welches mit der Continuität der empirischen Curve (entsprechend unseren natürlichen Ideen über Continuität) unmittelbar gegeben ist.

Der zu beweisende Satz lautet also nochmals:

Eine Funktion, die im Sinne von Cauchy stetig ist und bei $x = a$ positiv, bei $x = a+i$ negativ ist, besitzt zwischen a und $a+i$ mindestens einen Nullpunkt.

Der Beweis hat denselben Zuschnitt wie unsere Beweise über die Punktmengen, er ist ein Dezimalbeweis.

Wir teilen das Intervall a bis a+i in 10 Teile nach den einstelligen Dezimalbrüchen

$$a;0 \quad a;1 \quad a;2 \quad \ldots\ldots \quad a;9 \quad a+i;0 .$$

Wenn dann nicht für einen der Teilpunkte f(x) gleich Null ist (was wir ausschließen, da dann nichts mehr zu beweisen wäre), so gibt es ein erstes Intervall $a;b \ldots a;b+i$, an dessen linkem Endpunkt f noch positiv, an dessen rechtem Endpunkt f negativ ist, so daß für dieses Zehntelintervall eben dasjenige stattfindet, was für das ganzzahlige Intervall gilt.

Das Zehntelintervall $a;b \ldots a;b+i$ teilen wir jetzt in 10 Hundertelintervalle

$$a;b,0 \quad a;b,1 \quad a;b,2 \ldots a;b,9 \quad a;b+1,0 ,$$

(wo es wieder eintreten kann, daß keinem der Teilpunkte verschwindet, was wir indeß wieder ausschließen). Wir wählen wieder das erste dieser Intervalle, an dessen linkem Endpunkt f positiv, an dessen rechtem Endpunkt f negativ ist. Indem wir den Prozeß in der angegebenen Art fortsetzen, bekommen wir schließlich zwei Dezimalbrüche:

$$a;b,c,d,e,f \ldots .$$

$$a;b,c,d,e,f \ldots ,$$

die in immer mehr Dezimalen übereinstimmen, d.h. durch unbeschränkte Fortsetzung des Dezimalverfahrens

einen ganz bestimmten Grenzwert x_0.

Wir wollen nun zeigen, daß infolge der Cauchy'schen Definition der Stetigkeit f für diesen Grenzwert verschwindet, d.h. $f(x_0) = 0$ ist.

Dieser Satz läßt sich auf einen allgemeinen Grundsatz reduzieren.

x_0 ist der Limes einer fallenden und steigenden Reihe von Dezimalbrüchen; für die erstere ist f positiv, für die letztere negativ:

$$x_0 = \lim a;0 \mid a;b \mid a;b,c \mid \ldots \text{ mit } f > 0$$

$$x_0 = \lim a+1;0 \mid a;b+1 \mid a;b,c+1 \mid \ldots \text{ mit } f < 0$$

Es gilt nun für stetige Funktionen der Satz:

Wenn x_0 Limes einer Punktmenge x ist (eine Verdichtungsstelle der Punktmenge ist), dann ist auch der Funktionswert $f(x_0)$ der Limes derjenigen Funktionswerte $f(x)$, die den entsprechenden x_0 zugehören.

Es folgt dies einfach aus dem Wortlaut der Cauchy'schen Definition der Stetigkeit.

Hiermit ist nun unser obiger Satz unmittelbar bewiesen: Denn einmal erscheint hiernach $f(x_0)$ als Limes einer Reihe nur positiver Größen, das andere mal als Limes einer Reihe nur negativer Größen. Beide Behauptungen sind nur verträglich, wenn $f(x_0) = 0$ ist. —

Bei dem Beweise haben wir zuletzt einen Satz benutzt, der fast wichtiger als der bewiesene Satz selbst ist. Er lautet so:

Ist $f(x)$ stetig, so ist

$$f(\lim x) = \lim f(x),$$ oder in Worten:

Strebt das x einer Grenze zu, so strebt das f der Grenze der zugehörigen Funktionswerte zu.

Wir können aus diesem Satz noch einen weiteren ableiten, der uns später nützlich ist.

Wir wählen als x zunächst die überall dicht liegenden rationalen Zahlen ($x = \frac{m}{n}$) der Abscissenaxe. Durch sie können wir alle irrationalen Zahlen festlegen, nämlich als Limiten unendlicher Reihen von rationalen Zahlen. Es ist also für ein irrationales x_0

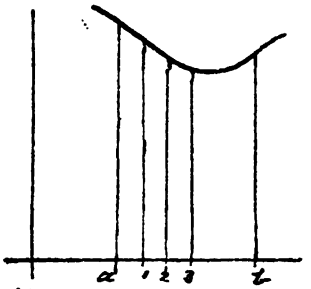
$$f(x_0) = f(\lim \text{rat. } x) = \lim f(\text{rat. } x),$$ in Worten:

Eine stetige Funktion ist in allen Punkten eines Intervalls definiert, wenn sie für alle Punkte eines das Intervall überall dicht erfüllenden Systems definiert ist, speziell also wenn sie für alle rationalen Zahlen definiert ist.

Wir können aber als System beispielsweise auch die Gesamtheit der endlichen Dezimalbrüche wählen (da diese auch noch überall dicht liegen), sodass wir als Corollar haben:

Insbesondere ist eine stetige Funktion vollkommen definiert, wenn sie für alle diejenigen Zahlen x definiert ist, die sich als endliche Dezimalbrüche ausdrücken lassen.

2) Wir kommen zu dem 2te. Punkt, wo von der Umgrenzung eines Flächeninhalts die Rede war.



Wir haben das Gefühl, daß jede empirische Kurve einen Flächeninhalt umgrenzt.

Um diesen empirisch zu berechnen kann man in roher Annäherung das Papier ausschneiden und wägen. Man findet durch diese Gewichtsmethode teilweise brauchbare Resultate.

Ein weiteres praktisches Verfahren giebt die sogenannte mechanische Quadratur, wohin die Trapez- und Simpson'sche Regel zu zählen sind. Um nur die Trapezformel zu geben, so teile man das Intervall durch die Teilpunkte 0, 1, 2 ... n in so kleine Stücke Δx (die zweckmäßig gleich groß gewählt werden), daß das Curvenstück zwischen den Ordinatenendpunkten der einzelnen Δx als annähernd geradlinig betrachtet werden kann. Durch Summation der Trapezinhalte findet man dann für den von der Curve umspannten Flächeninhalt:

$$\Delta x \frac{y_0+y_1}{2} + \Delta x \frac{y_1+y_2}{2} + \ldots + \Delta x \frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$
$$= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Ein drittes praktisches Verfahren operirt mit dem Planimeter.

Diese empirischen Integrationsmethoden sind in meiner Vorlesung über Integralrechnung (WS. 1896/7)[1] um so eingehender behandelt, weil die meisten Lehrbücher hierüber mit Stillschweigen oder doch mit ungebührlicher Kürze hinweggehen; vergl. die auf dem Lesezimmer aufgestellte Ausarbeitung[1]. Im Seminar behandelten wir neuerdings die Fehlertheorie des Amsler'schen Polarplanimeters. Eine Hauptfehlerquelle für die praktische Bestimmung des Flächeninhalts ist übrigens nicht sowohl die Willkür in der Wahl der Grösse Δx, als vor allem die Breite der gezeichneten oder sonst empirisch gegebenen Curve, die den Flächeninhalt abgrenzt. So ist z. B. bei einer Länge von 10 cm und einer Breite 1/3 mm des Streifens der aus letzterer entstehende Fehler 1/3 cm².

Wie werden wir nun theoretisch diese Dinge fassen?

Die theoretische Betrachtung begann damit die Summe $\sum_{\mu} \Delta x \cdot f_\mu(x)$, wo $f_\mu(x)$ nicht gerade die Mittelordinate, sondern irgend eine Ordinate in dem Intervall

---

1) Nicht autographiert.

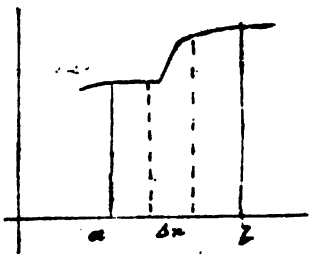
Δx sein kann, und untersucht, ob für ein gegebenes $f(x)$ ein Limes existiert, wenn die Δx unbegrenzt kleiner (und natürlich gleichzeitig immer zahlreicher) werden. Wir bezeichnen den Limes mit $\int_a^b f(x) \cdot dx$ und nennen ihn das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b. Die Frage, die wir im folgenden zu entscheiden haben, ist:

Existiert und wann existiert ein solcher Limes d. h. wann ist die Funktion $f(x)$ integrierbar?

Der erste, der diese Frage aufgeworfen und im allgemeinen Sinn behandelt hat, ist B. Riemann in seiner Habilitationsschrift 1854:

B. Riemann: Über die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe.

Wir beginnen damit, daß wir eine endliche Funktion, die nicht stetig zu sein braucht, in dem Intervalle a bis b betrachten und für ein Intervall Δx je die größte Ordinate $f_{max}(x)$ und die kleinste Ordinate $f_{min}(x)$ besonders herausheben. Dann wird unser Wert $f(x)$ irgend ein Wert zwischen diesen beiden sein, also:



Unsere ursprüngliche Summe $\Sigma \Delta x \, f(x)$ liegt zwischen zwei Grenzen $\Sigma \Delta x \cdot f_{max}(x)$ und $\Sigma \Delta x \cdot f_{min}(x)$, und

diese beiden Grenzen unterscheiden sich nun die Differenz $\Sigma \Delta x \cdot \Pi f(x)$, wo $\Pi f(x)$ die „Schwankung" ist, die die Funktion im Intervalle Δx erleidet.

Wenn wir nun zeigen können, daß $\Sigma \Delta x \cdot \Pi f(x)$ durch hinreichend kleine Wahl der Teilchen Δx beliebig klein gemacht werden kann, dann nennen wir die Funktion integrierbar.

Wir nehmen nunmehr speziell die Funktion stetig an und behaupten:

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, so kann man auf alle Fälle die Summe $\Sigma \Delta x \cdot \Pi f(x)$ beliebig klein machen d.h. also: jede stetige Funktion ist integrierbar.

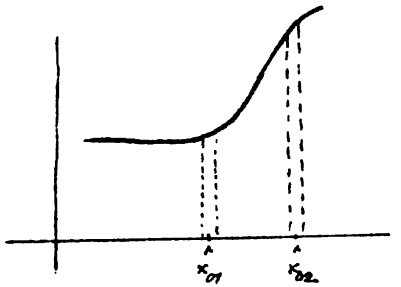
Bevor ich den Beweis geben kann, muß ich noch einen feinen Punkt über Stetigkeit erwähnen, den ich aber nicht ganz ausführen werde:

Wir hatten eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig genannt, wenn es ein ξ_0 gibt, so daß für

$$|x - x_0| < \xi_0 \qquad |f(x) - f(x_0)| < \eta$$

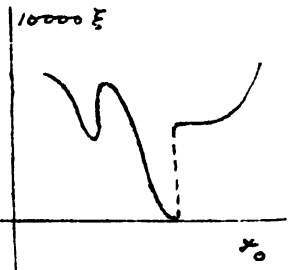
folgt, unter η eine beliebig kleine vorgegebene Größe verstanden.

Wie ändert sich nun die Stetigkeit, wenn x_0 durch das Intervall ab hinwandert d.h. was ist das Maass der Stetigkeit, wenn x_0 das Intervall durchläuft?



Wir kommen zu dieser Frage-
stellung, wenn wir eine Curve
betrachten, die einmal flach,
das andere Mal steil ansteigt.
Offenbar kann ich an der Stelle x_{01} für dasselbe η
ein größeres ξ_0 angeben, als an der Stelle x_{02}, so daß
also ξ_0 bei gegebenem η für verschiedene Stellen x_0
äußerst verschieden sein kann (jenachdem die Cur-
ve mehr flach oder steiler verläuft).

Wir können uns dies durch eine <u>Hilfscurve</u>, die
uns eine Beurteilung über das Maass der Steig-
keit gestattet, klarer machen.

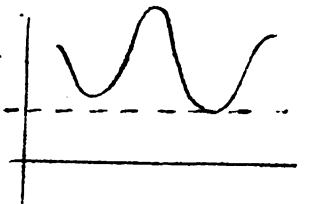


Wir wählen x_0 als Abscisse und
10000 ξ_0 etwa als Ordinate. Die ent-
stehende Curve (die uns für gege-
benes η die Abhängigkeit des ξ_0 von
x_0 giebt) wird im ganzen Intervalle positive Or-
dinaten haben. Damit ist aber noch nicht aus-
geschlossen, daß die Hilfscurve in der in der Figur
angedeuteten Weise verläuft, daß nämlich die Ordi-
naten an einer oder mehreren Stellen der Null be-
liebig nahe kommen, um an der Stelle, wo sie nach
der Continuität Null werden sollte, plötzlich in die
Höhe zu springen, womit die Forderung, daß die Kurv-

tion überall positive Werte haben soll, in der Tat genügt ist. Die Hülfscurve würde also eine Unstetigkeit darbieten. Tritt ein solches Verhalten ein, so nennen wir die Ausgangsfunktion „ungleichmäßig stetig" in dem Intervall. Wir werden sagen:

Durch die Annahme, daß eine Funktion in einem jeden einzelnen Punkte des Intervalls stetig ist, ist zunächst noch nicht ausgeschlossen, daß die Stetigkeit über das Intervall hin gleichmäßig ist, d.h. daß es Stellen gibt, wo das ξ_0 kleiner wird als eine noch so kleine vorgegebene Größe.

Wir haben dagegen eine gleichmäßige Stetigkeit in dem Intervall, wenn die ξ-Curve wohl auf- und abschwankt, doch jener Ausnahmefall nicht eintritt d.h. wenn wir bei vorgegebenem η eine Größe ξ derart angeben können, daß für alle Punkte x_0 des Intervalls gleichzeitig, sobald nur $|x-x_0|<\xi$ ist, auch $|f(x)-f(x_0)|<\eta$ ist.



Jetzt kommt der Punkt, dessen Beweis ich der Kürze halber übergehe. Man zeigt, daß die schlimme Eventualität der ungleichmäßigen Stetigkeit, an die wir beiläufig dachten, in Anbetracht unserer Definition der Stetigkeit von vornherein in Wegfall kommt:

gilt also der Satz:

Jede Funktion, die in allen Punkten eines Intervalls stetig ist, ist in dem gegebenen Intervall auch gleichmäßig stetig.

Wegen des Näheren verweise ich auf meine Vorlesung über Funktionentheorie xx/ (W. S. 1898/99) oder auf

J. Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris. 1886

u. A. Pringsheim: Allgemeine Funktionentheorie, Encyclopädie der math. Wissenschaften Bd 2, p. 18. x/

Ich habe hier auf die Möglichkeit einer ungleichmäßigen Stetigkeit deshalb so ausführlich aufmerksam gemacht, weil wir später bei Fragen der Reihenbewegung mit analogen Möglichkeiten zu rechnen haben werden.

Nunmehr nehme ich die Frage der Integrierbarkeit der stetigen Funktionen wieder auf.

Da wir wissen, daß f(x) gleichmäßig stetig im Intervall ab ist, können wir ein ξ so finden, daß für dasselbe im ganzen Intervall wenn nur $|x - x_0| < \xi$ ist, $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ wird. Wählen wir also

---

x/ Vgl. für die sämmtlichen hier in Betracht kommenden Entwicklungen auch

Harkness u. Morley: A treatise of the theory of analytic functions, London 1893, sowie die Introduction derselben Verfassen, London 1878.

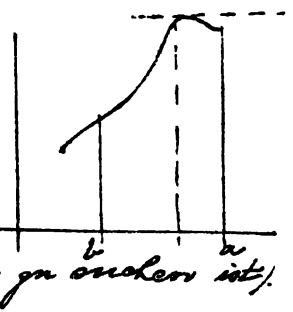
xx/ Nicht autographiert

$\Delta x < \xi$, so wird die Schwankung in dem Intervall Δx $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ oder $\Pi f(x) < \eta$. Für die Summe der mit Δx multiplizierten Schwankungen folgt jetzt:

$$\sum_a^b \Delta x \cdot \Pi f(x) < \eta \sum_a^b \Delta x = \eta (a-b) \text{ d. h.}$$

Für eine stetige Funktion $f(x)$ können wir die Summe $\Sigma \Delta x \cdot \Pi f(x)$ kleiner machen als $\eta(a-b)$ und damit kleiner als jede vorgegebene Zahl; es ist also eine stetige Funktion stets integrierbar.

3) Wir betrachten unter Punkt 3) die Lehre von den Maximis und Minimis.



Die Ordinate einer empirischen Curve hat in einem Intervall allemal mindestens ein Maximum oder Minimum (das eventuell an den Endpunkten des Intervalls zu suchen ist). Die Frage ist:

Hat eine idealisierte d. h. eine Function $y = f(x)$ (die natürlich im Intervall endlich bleiben soll) im Sinne der Präzisionsmathematik in dem Intervall $b \ldots a$ ein Maximum?

Wir müssen hier zunächst zwischen oberer Grenze und Maximum unterscheiden. Für erstere gilt der Satz:

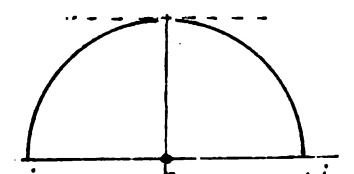
Ist $f(x)$ eine im Intervall $b \ldots a$ endliche

Funktion, dann gibt es für die y-Werte des Intervalls sicher eine obere Grenze d.h. einen Wert K dem man beliebig nahe kommt, ohne ihn je zu überschreiten.

Der Beweis folgt einfach aus unserem ersten Satz über Punktmengen pg. 25. In der Tat, Zu jedem x unseres Intervalls gehört ein bestimmtes y, sodaß wir dem Intervalle der x-Axe entsprechend auf der y-Axe eine wohldefinierte Punktmenge erhalten, die nicht ein Punktliche geht. Für eine solche Punktmenge aber haben wir die Existenz des oberen Grenzpunktes bewiesen.

Unbekannt bleibt aber zunächst noch, ob dieser obere Grenzwert der Punktmenge angehört, ob er also zu einem bestimmten x als Ordinate zugehört oder nicht, ob also die obere Grenze erreicht wird oder nicht.

Ich will zunächst ein Beispiel geben, wo dies nicht der Fall ist. $f(x)$ sei definiert für alle Punkte zwischen $+i$ und $-i$ durch die Punkte eines Halbkreises, dessen Mittelpunkt in 0 liegt und dessen Radius 1 ist, nur für den Wert $x=0$ sei $f(x)=0$. Also:



$|x| \geq 0 \qquad y = \sqrt{1-x^2}$

$|x| = 0 \qquad y = 0$, wie dies durch die Figur auf pg 73 angedeutet ist. Dies ist eine wohl definierte, allerdings unstetige Funktion. Die obere Grenze ist 1, welche aber nicht erreicht wird, da für $x=0$, wo sie erreicht würde, nach Definition $f(0) = 0$ ist.

Im Gegensatz hiezu erreicht jede stetige Funktion in jedem Intervall ihre obere Grenze d.h. eine stetige Funktion hat in jedem Intervall ein Maximum.

K. Weierstrass hob diesen Satz in seinen Vorlesungen stets besonders hervor, indem er aber den Gegensatz zwischen Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik nicht besonders betonte, trat der Satz bei ihm für den Anfänger unvermittelt auf, sodass sein gedanklicher Inhalt und die Notwendigkeit eines Beweises für Manchen nicht recht verständlich wurde.

Wir geben hier wieder einen sog. Dezimalbeweis d.h. wir definieren durch wiederholte Zehnteilung des Intervalls

$$a \;\ldots\ldots\; a+1;\, 0$$
$$a;b \;\ldots\ldots\; a;\, b+1$$
$$a;b,c \;\ldots\ldots\; a;\, b,a+1$$

eine Stelle x_0 derart, daß für ein beliebig kleines Teilintervall um x_0 herum k die obere Grenze ist. So weit ist der Schluß für jede Funktion f zu machen, daß aber dann $f(x_0) = k$ ist, gilt nur für stetige Funktionen. Letzteres wollen wir jetzt auch ausdrücklich zeigen.

Wir thun dies auf indirektem Wege, indem wir annehmen, daß $f(x_0) = k'$ sei, wo k' um einen endlichen Betrag kleiner als k ist. Aus der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ folgt, daß wir um x_0 ein Intervall so abgrenzen können, daß die Schwankung

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \eta \text{ ist, wo}$$

wir η ausdrücklich kleiner als $k - k'$ wählen wollen. Es liegen also die Funktionswerte zwischen $k' - \eta$ und $k' + \eta$. Da aber $k' + \eta$ immer noch kleiner als k ist, so folgt, daß k für unser Intervall nicht obere Grenze ist, was wir aber doch wegen der Definition der Stelle x_0 annehmen müssen. Der Widerspruch läßt sich also folgendermaßen formulieren:

Wäre $f(x_0) = k' < k$, so würde man in Folge der Stetigkeit von $f(x)$ um x_0 ein Intervall abgrenzen können, daß sämtliche Funktionswerte um ein endliches Stück kleiner als k sind, was mit

der Annahme K sei die obere Grenze für jedes den Punkt x_0 umgebende Intervall unvereinbar ist. -

Fassen wir zusammen, so sehen wir, daß die Continuität, die wir bei der empirischen Curve voraussetzen, bei den stetigen Funktionen der Präzisionsmathematik sich wiederfindet und daß auch die Attribute: Flächeninhalt und Existenz der Maxima und Minima bei diesen statt haben. Wir werden im Interesse der Übereinstimmung mit den empirischen Funktionen jetzt noch ausdrücklich voraussetzen, daß es bei unserm $f(x)$ nur eine endliche Zahl von Maximis und Minimis in endlichen Intervalle gibt.

4/ Wie steht es aber mit der Existenz des Differentialquotienten bei unserm $f(x)$?

Wir sagen zunächst: Bei der empirischen Curve sahen wir die Richtung durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Δx von bestimmter Größenordnung) definiert an. Bei der genauen Funktion $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik definierten wir den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ als

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0}, \text{ also:}$$

In der Präzisionsmathematik ist der Differentialquotient nicht ein Quotient, sondern der Li-

mes eines Quotienten. Die Frage ist:

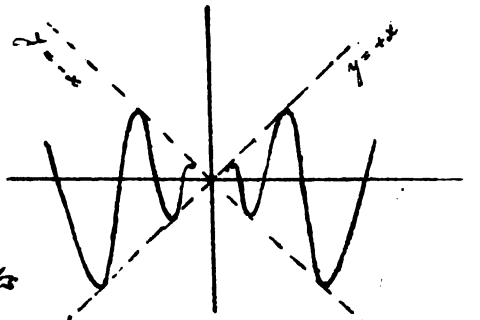
Existiert ein solcher Limes?

Ich weise vorläufig auf folgenden Unterschied hin, der sich durch die ganze Literatur hindurchzieht:

α) Es wird das eine Mal mehr Gewicht darauf gelegt, daß der Differentialquotient der Limes eines Quotienten ist, d.h. man behält die Associationen, die wir bei der empirischen Curve haben, auch bei $\frac{dy}{dx}$ bei, legt also mehr Gewicht auf die Analogie mit der empirischen Curve, als auf den hinzutretenden Grenzübergang. Dieser Standpunkt ist weniger exakt, aber nach vielen Richtungen anregend.

β) Das andere Mal streift man alles ab, was an einen Quotienten erinnern könnte und schreibt daher auch nicht $\frac{dy}{dx}$, sondern etwa D_x und sagt „Derivierte" oder „Ableitung" von $f(x)$ nach x. Hier wird also das Hauptgewicht auf das Wort Limes gelegt. Dieses Verfahren ist weniger anregend, aber besonders exakt. —

Damit ich völlige Klarheit inbetreff der vorgelegten Frage nach der Existenz eines Limes von $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ (für $\Delta x = 0$) für stetige Funktionen zeige, beginne ich mit einem Beispiele.



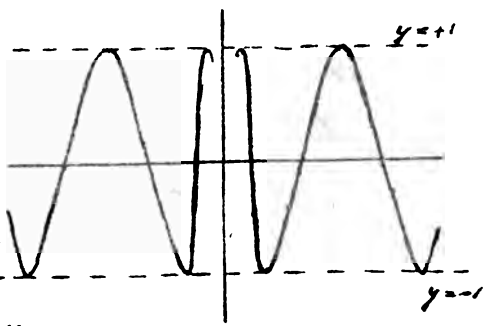
Wir wählen die bereits oben herangezogene Funktion

$$y = x \cdot \sin 1/x .$$

Sie läuft von rechts wie links mit immer gehäuften Schwingungen zwischen den Ordinaten $y = +x$ und $y = -x$ auf den Nullpunkt zu, in welchem selbst sie übrigens durchaus stetig ist. (Man vergleiche den Wortlaut der Cauchy'schen Definition). Wir bilden uns für den Coordinatenanfangspunkt den Differenzenquotienten. Er wird offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x} = \sin 1/x$$

Was werden wir nun von dem Differentialquotienten sagen können?



$\sin 1/x$ ist eine Funktion, die für unbeschränkt kleiner werdendes x unendlich oft zwischen $+1$ und -1 auf- und abschwankt. Also:

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schwankt, wenn Δx gegen Null geht, fortgesetzt zwischen $+1$ und -1 hin und her, ohne sich einer festen Grenze zu nähern. Dabei sind $+1$ und -1 in der Wertemenge, welche der Differenzenquotient annimmt, wenn Δx bis zur Null abnimmt, die obere und untere Grenze, wie

Klein man auch das Intervall nehmen mag, in welchem sich Δx bewegt. (Dass diese obere und untere Grenze im Intervall immer wieder wirklich angenommen wird, wollen wir nicht besonders betonen.)

Bei unserer Betrachtung dachten wir uns soweit Δx positiv. Das Resultat ändert sich aber ersichtlich nicht, wenn wir Δx nach der negativen Seite wählen.

Bezeichnen wir für positives Δx die obere Grenze der Werte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei unbegrenzt abnehmendem Δx mit Π^+, die untere mit Π_+, für negatives Δx die obere Grenze mit Π^-, die untere entsprechend mit Π_-, so ist unser Resultat in Formeln geschrieben:

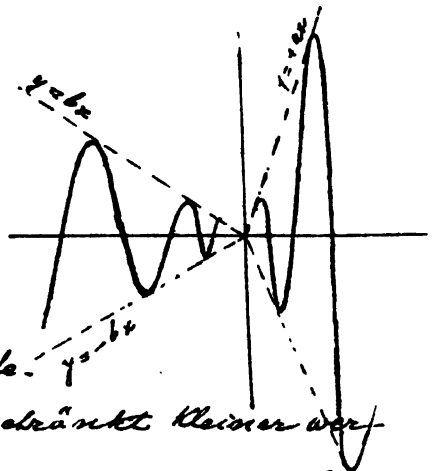
$$\Pi^+ = +1 \quad \Pi_+ = -1, \quad \Pi^- = +1 \quad \Pi_- = -1$$

Derartige 4 Grenzwerte können wir nun an jeder Stelle einer stetigen Funktion bilden, wie wir weiterhin noch zu erörtern haben.

Wir ändern unser Beispiel vorab noch ein wenig ab, so dass die Funktion rechts und links von der y-Axe nicht mehr symmetrisch ist. Wir schreiben

$y = ax \cdot \sin \frac{1}{x}$ rechts

$y = bx \cdot \sin \frac{1}{x}$ links



d.h. die Curve schwankt rechts zwischen $+ax$ und $-ax$, links zwischen $+bx$ und $-bx$ und ist im Nullpunkt stetig.

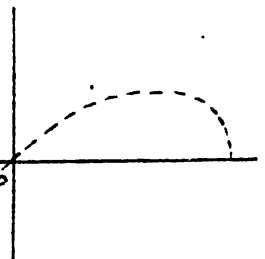
Unsere 4 Grenzwerte des Differenzenquotienten für unbeschränkt kleiner werdendes Δx sind dann

$$\Pi^+ = a \qquad \Pi_+ = -a, \qquad \Pi^- = b \qquad \Pi_- = -b$$ d.h.

Wir haben hier ein Beispiel, bei dem die Grenzen rechts und links verschieden sind.

Wir gehen in der Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter. Unser Beispiel ist nämlich noch darin particulär, daß der Differenzenquotient (wie wir schon beiläufig hervorhoben) die beiden Grenzen, auf welche er sich hinbewegt, wenn $\Delta x = 0$ wird, schon vorher unendlich oft annimmt. Man kann aber sehr leicht Beispiele bilden, wo dies nicht der Fall ist.

Es sei $y = y_1 \cdot \sin \frac{1}{x}$,



wo y_1 die Ordinate einer Curve ist, welche nach Art der nebenstehend gezeichneten unter 45° durch den Nullpunkt geht.

Hier schwankt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nicht zwischen $+i$ und $-i$,

wird aber diesen Grenzen immer näher kommen, sowie Δx sich dem Nullpunkt nähert.

Wollen wir für y_1 eine gesetzmässige Curve, etwa eine Lemniscate wählen (um eine geschlossene analytische Formel zu haben), so sind y_1 und x durch die Gleichung

$(x^2 + y_1^2)^2 = x^2 - y_1^2$ an einander gebunden, d. h.

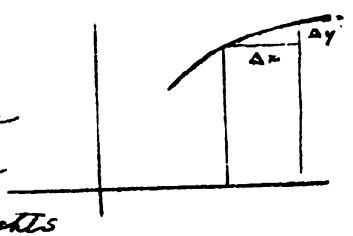
$$y_1 = +\sqrt{\frac{+\sqrt{8x^2+1} - (2x^2+1)}{2}}$$ für das gezeichnete Curvenstück im ersten Quadranten.

Mithin lautet unsere Funktion

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1} - (2x^2+1)}{2}} \cdot \sin 1/x .$$

Hier schwankt also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen $+1$ und -1, wenn Δx gegen Null geht, aber diese Werte selbst werden nicht mehr angenommen.

Durch diese Beispiele dürfte nun folgendes klar sein:



Es sei irgend eine stetige Funktion $y = f(x)$ gegeben. Wir markieren die Punkte x und y und construieren nach rechts Δx und das zugehörige Δy, dann giebt es jedenfalls 2 Grenzwerte, zwischen denen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei unbeschränkt kleiner werdendem Δx sich hin-

und herbeweget: Π^+ und Π_+. Ebenso werden, wenn Δx von links gegen Null geht, die Werte von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, je kleiner Δx wird, zwischen 2 bestimmten Grenzen Π^- und Π_- enthalten sein. Also:

Wie immer die stetige Funktion $f(x)$ gestaltet sein mag, wenn Δx gegen Null geht, so wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen 4 Grenzwerten eingeschlossen sein, von der einen Seite zwischen Π^+ und Π_+, von der andern zwischen Π^- und Π_-.

Wenn $\Pi^+ = \Pi_+$, so werden wir sagen, daß die Funktion nach rechts einen „Differentialquotienten" besitzt, ist $\Pi^- = \Pi_-$, so hat sie einen linksseitigen Differentialquotienten.

Wir werden aber dann, und nur dann, schlechtweg von einem bestimmten Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle reden, wenn sämtliche 4 Grenzwerte gleich sind.

Wenn man sich in dieser Weise klar macht, wieviel Bedingungen zu erfüllen sind, damit eine Funktion in jedem Punkte einen Differentialquotienten hat, so muß man sich wundern, daß es überhaupt solche Funktionen giebt. Dieses Radium der Verwunderung ist das andere Extrem, dessen Gegenstück durch die gedankenlose Gewöhnung gebil-

det wird, derzufolge jede stetige Funktion einen Differentialquotienten besitzen soll.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen und zur völligen Einübung derselben beschäftigen wir uns nunmehr ausführlich mit einem Beispiele einer stetigen Funktion, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten in dem von uns bezeichneten Sinne hat.

Wir wählen die bekannte Weierstraß'sche Funktion, die derselbe um 1861 auffand, die aber erst 1874 in einem Aufsatze von P. du Bois-Reymond publiciert wurde (J. f. Math. 79 (1875)). Was die allgemeine Litteratur des in Rede stehenden Gegenstandes angeht, so verweise ich auf:

A. Voss: Differential- und Integralrechnung, Encyklopädie d. math. Wissenschaften Bd 2

E. Pascal: Esercizii di calcolo infinitesimale, pg 63, 64, Milano 1895, pg 85 – 128,

wo sämtliche damals bekannten Entwickelungen zusammengestellt sind (Angabe der Litteratur); ferner aber auf die neueren Publicationen:

E. Steinitz: Stetigkeit und Differentialquotient, Math. Ann. 52 (1899), pg

E. H. Moore: On certain crinkly curves, American Math. Soc. Transactions 1 (1900)

Die Weierstraß'sche Funktion ist durch eine unendliche trigonometrische Reihe von der Form

$$y = \sum_0^\infty b^\alpha \cos(a^\alpha x \pi)$$

gegeben wo $b > 0$, aber < 1 (wegen der Convergenz der Reihe) und a eine ungerade Zahl ist.

Wir wollen uns zunächst an einem Zahlenbeispiel den Aufbau der Funktion klar machen. Es sei $b = 1/2$, $a = 5$, also

$$y = \cos x\pi + 1/2 \cos 5x\pi + 1/4 \cos 25x\pi + 1/8 \cos 125x\pi + \ldots.$$

Wir betrachten zuerst die Teilcurven:

$$y_0 = \cos x\pi$$

$$y_1 = 1/2 \cos 5x\pi$$

$$y_2 = 1/4 \cos 25x\pi$$

. . . . . , aus denen durch Überlagerung die Curve y hervorgeht.

$y_0 = \cos x\pi$ ist eine gewöhnliche Cosinuslinie, deren erster Nullpunkt bei $x = 1/2$ liegt und die die halbe Wellenlänge 1 hat.

$y_1 = 1/2 \cos 5x\pi$ giebt eine Wellenlinie, deren Höhe zwischen $+1/2$ und $-1/2$ schwankt, deren erster Nullpunkt bei $x = 1/10$ liegt und deren halbe Wellenlänge $1/5$ beträgt. Die Wellenlinie y_1 verläuft daher steiler als y_0.

$y_2 = 1/4 \cos 25x\pi$ ist eine Wellenlinie, die abermals

Teiler als die vorhergehende verläuft. Der erste Nullpunkt liegt bei $x = 1/50$, die halbe Wellenlänge beträgt $1/25$, die Ordinaten schwanken zwischen $+1/2$ und $-1/2$.

Die folgenden Teilcurven verlaufen entsprechend mit immer gesteigerter Steilheit und geringerer Höhe, sodaß wir als springenden Punkt, wodurch auch später der Erfolg wesentlich bedingt ist, nötigen:

Die successiven Teilcurven, welche überlagert die Endcurve ergeben, stellen Wellenlinien vor von zwar abnehmender Amplitude, aber immer zunehmender Steilheit.

Wir verlassen nun das Zahlenbeispiel und gehen zu der ursprünglich gegebenen Funktion

$$y = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi$$

zurück. Bei ihr unterscheiden wir dem früheren analog:

1) Teilcurven $y_\nu = b^\nu \cos a^\nu x\pi$

2) Näherungscurven $y_m = \sum_0^m b^\nu \cos a^\nu x\pi$

d. h. die Summe von $m+1$ Teilcurven

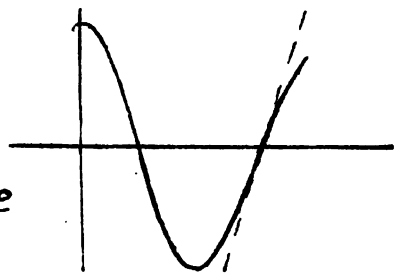
3) die Endcurve $y = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi$.

In Bezug auf die Teilcurven haben wir für $a > 1$, $b < 1$ jedenfalls den Satz:

Mit wachsendem ν werden die Teilcurven im-

mer niedriger und schmaler.

Werden sie aber auch immer steiler, wie in unserm Zahlenbeispiel?



Wir messen die Steilheit der Curve durch den Differentialquotienten in einem Knoten d.h. in einem Punkte, wo die Curve die x – Axe durchsetzt, indem cos $a^{\nu} x\pi$ verschwindet.

$\frac{dy_\nu}{dx}$ wird gleich $- a^{\nu} b^{\nu} \pi \sin a^{\nu} x\pi$; für einen Knotenpunkt wird hiernach

$$\left|\frac{dy_\nu}{dx}\right| = (ab)^{\nu}\pi.$$

Sobald also $a.b > 1$ ist, werden die aufeinanderfolgenden Teilcurven, trotzdem sie an Höhe mit wachsendem ν abnehmen, mit wachsendem ν steiler und steiler.

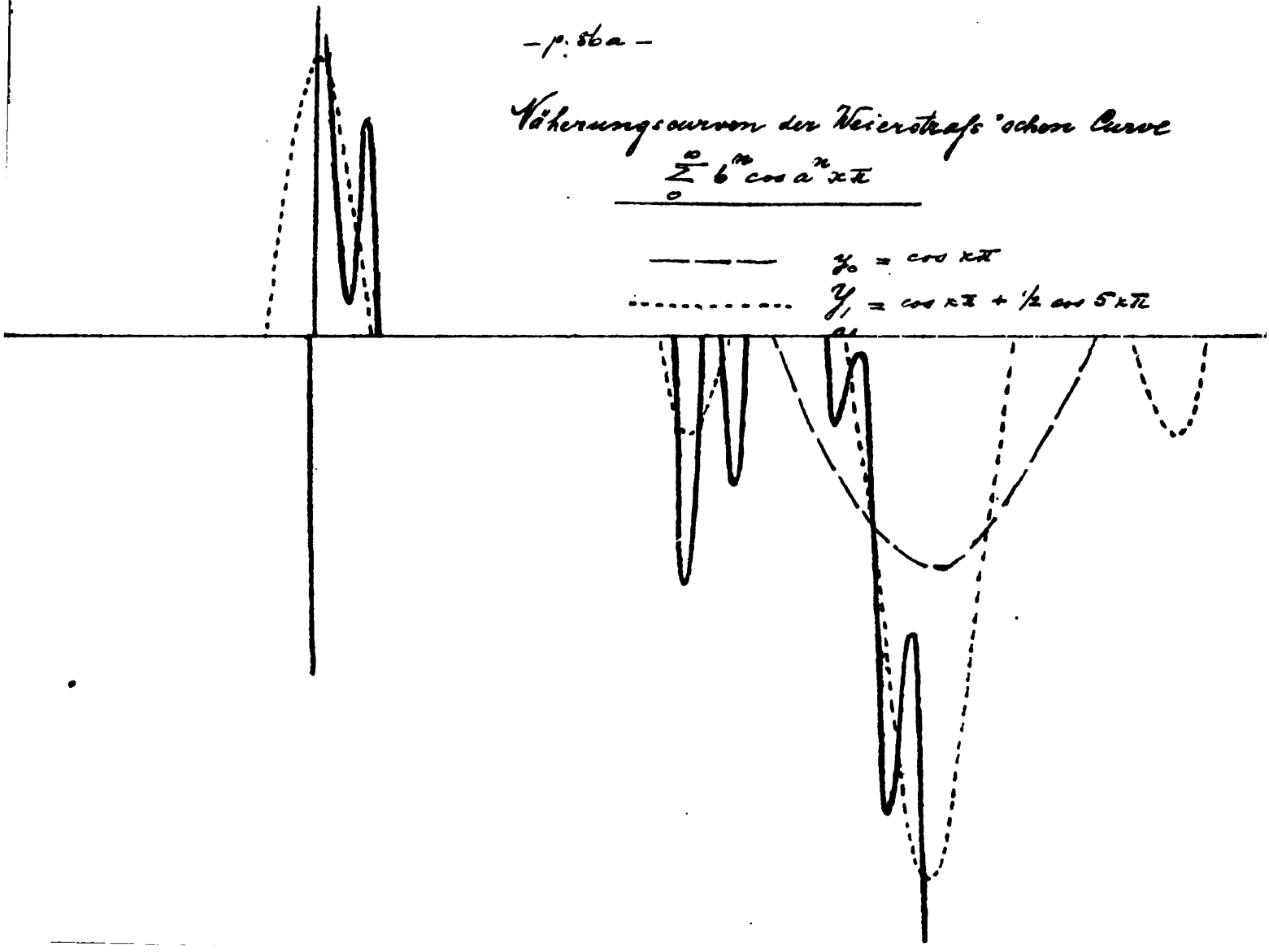
Wir sagen nunmehr etwas <u>über die Näherungscurven</u>. Haben wir uns erst klar gemacht, wie eine solche Näherungscurve aus der nächstvorangehenden entsteht, so werden wir durch die Forderung der unbeschränkten Fortsetzung des Prozesses in der Lage sein, uns ein gewisses Bild von der Endcurve zu machen.

Es ist

$$y_1 = \cos x\pi + b \cos 2x\pi \quad \text{d. h. also:}$$

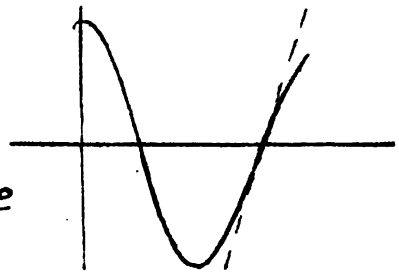
Näherungscurven der Weierstrass'schen Curve

$$\sum_{0}^{\infty} b^{m} \cos a^{n} x\pi$$



mer niedriger und schmaler.

Werden sie aber auch immer steiler, wie in unserm Zahlenbeispiel?



Wir messen die Steilheit der Curve durch den Differentialquotienten in einem Knoten d.h. in einem Punkte, wo die Curve die x – Axe durchsetzt, indem cos a'' xπ verschwindet.

$\frac{dy_v}{dx}$ wird gleich $- a''b''\pi \sin a'' x\pi$, für einen Knotenpunkt wird hiernach

$$\left|\frac{dy_v}{dx}\right| = (ab)''\pi.$$

Sobald also a.b > 1 ist, werden die aufeinanderfolgenden Teilcurven, trotzdem sie an Höhe mit wachsendem v abnehmen, mit wachsendem v steiler und steiler.

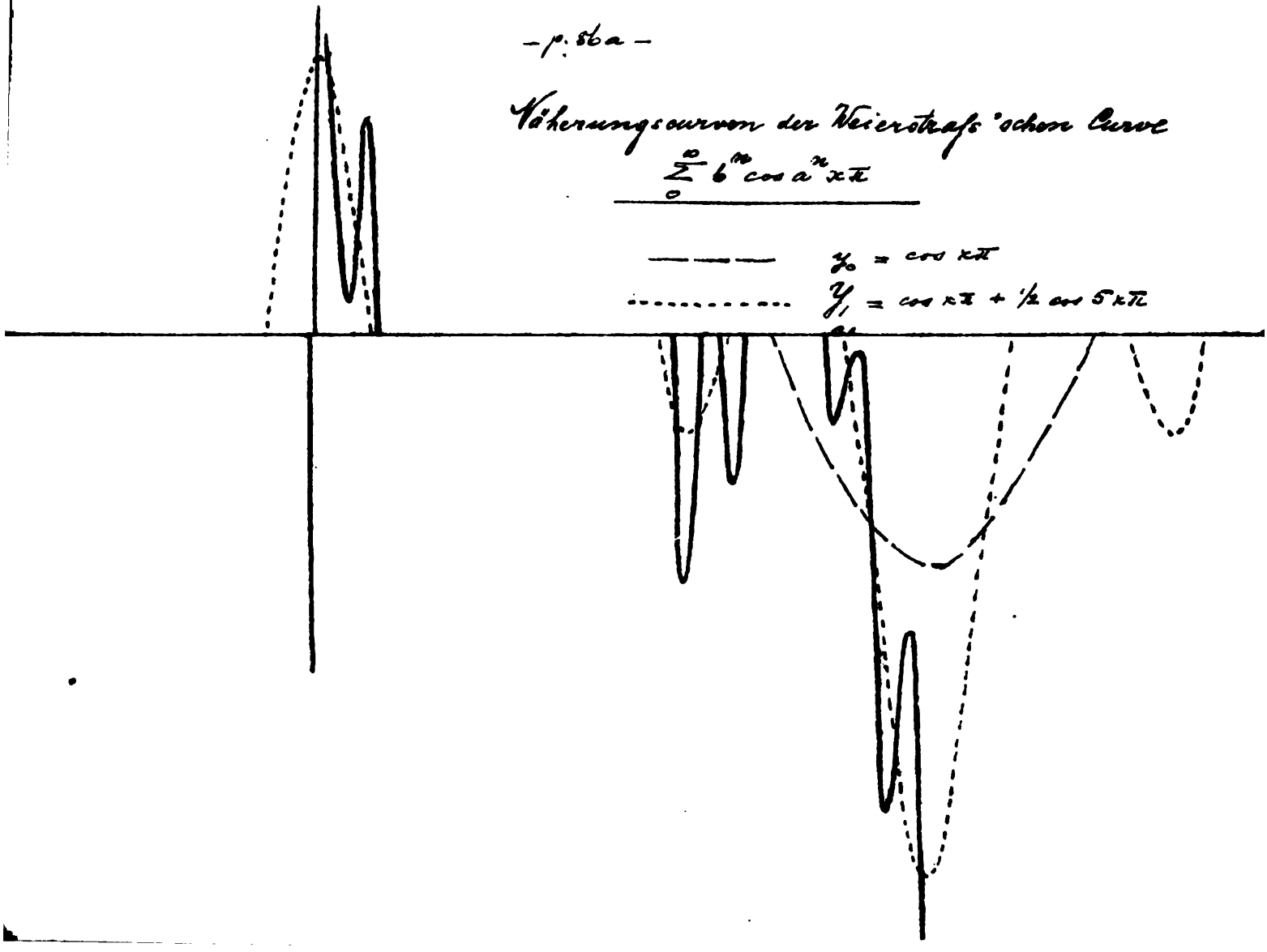
Wir sagen nunmehr etwas <u>über die Näherungscurven</u>. Haben wir uns erst klar gemacht, wie eine solche Näherungscurve aus der nächstvorangehenden entsteht, so werden wir durch die Forderung der unbeschränkten Fortsetzung des Prozesses in der Lage sein, uns ein gewisses Bild von der Endcurve zu machen.

Es ist

$$y_1 = \cos x\pi + b \cos 2x\pi \text{ d. h. also:}$$

Näherungscurven der Weierstrass'schen Curve

$$\sum_{0}^{\infty} b^{n} \cos a^{n} x\pi$$



Die Näherungscurve Y_1 hat man sich in der Weise zu denken, dass man über die gemeine Cosinuslinie eine feinere Wellenlinie überlagert.

Bilden wir Y_2, so ist

$$Y_2 = \cos x\pi + b\cos ax\pi + b^2 \cos a^2 x\pi \quad \text{u. s. f.}$$

hier tritt zu der vorigen noch eine feinere Wellenlinie (schmaler und steiler) hinzu.

Ist hiermit der organische Aufbau der Näherungscurven gegeben[1], so erlahmt doch unsere Vorstellungskraft rasch, wenn wir die entstehende Curve als Ganzes überblicken wollen; wir müssen uns vielmehr sehr bald mit der logischen Definition genug sein lassen, die ich so formuliere:

Jede folgende Näherungscurve ergiebt sich aus der vorangehenden, indem sich eine neue feinere Welle von kleinerer Amplitude, aber noch kleinerer Wellenlänge über die bereits construirte Curve hinüberlagert.

Was können wir nun über die Endcurve aussagen?

Wir denken uns die mit Näherungscurve konstruiert und schreiben daher

---

[1] Vgl. die ausgeführte Figur neben pg 86; hier ist wieder $b = 1/2$, $a = 5$ genommen. Ich schliesse mich mit dieser Bezeichnung und den folgenden Betrachtungen an die Entwickelungen von Chr. Wiener an

$$y = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi = y_m + \sum_{m+1}^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi .$$

Die einzelnen Summanden in der Summe haben alle denselben Faktor b^{m+1}. Indem wir ihn herausziehen, folgt

$$y = y_m + b^{m+1} \sum_0^\infty b^s \cos a^{m+1+s} x\pi .$$

Wir schätzen nun die unendliche Summe ab d.h. wir geben eine obere und untere Grenze für die Summe und damit einen Streifen an, in dem die Curve liegt.

Die obere Grenze erhalten wir, wenn wir die Cos sämtlich $+1$, die untere Grenze, wenn wir sie sämtlich gleich -1 setzen. Also

$$y = y_m + b^{m+1} \begin{cases} 1 + b + b^2 + \dots & \text{obere Grenze} \\ -1 - b - b^2 - \dots & \text{untere } - \end{cases}$$

In der Klammer steht eine geometrische Reihe, die convergiert, da wir b ausdrücklich kleiner als 1 voraussetzten. Somit ist das Resultat

$$y = y_m + \varepsilon b^{m+1} \cdot \frac{1}{1-b} ,$$ wo ε eine unbekannter Faktor zwischen $+1$ und -1 ist, die Grenzen eventuell eingeschlossen. In Worten:

Die Ordinate der Endcurve ergiebt sich aus der Ordinate y_m der m^{te} Näherungscurve, indem

---

im J. f. Math. 90 (1881) an, ohne indeß seine (unrichtige) Kritik der Weierstraß'schen Behauptungen aufzunehmen.

men einen Betrag addiert, der die Gestalt $e\frac{b^{m+1}}{1-b}$ hat, wo e in den angegebenen Grenzen liegt.

Mehr geometrisch können wir auch sagen: Unsere Endcurve ist eingeschlossen in einem Streifen von der Dicke $2\frac{b^{m+1}}{1-b}$, dessen Mittellinie die m^te Näherungscurve ist.

Ist z.B. $b = 1/10$ und messen wir in Centimetern, so wird für $m = 6$ $2\frac{b^{m+1}}{1-b} = 2\frac{1/10^7}{9/10} = 2\frac{1}{9\cdot 10^6}$ d.h. eine Breite, die unter das hinabsinkt, was je mit dem schärfsten Mikroskope wahrgenommen ist. Ist also b einigermaßen klein, so sinkt die Breite des Streifens außerordentlich rasch herab.

Jedenfalls folgt aber aus diesem Satze die Stetigkeit der Funktion y, und zwar folgendermaßen:

y_m ist stetig als endliche Summe stetiger Funktionen. Was noch hinzugefügt wird, damit wir die Endcurve erhalten, kann mit wachsendem m beliebig klein gemacht werden. Beides zusammengenommen heißt aber nichts anderes, als daß y stetig ist. Wir wollen hierfür noch kurz die Formeln geben:

Sei $y(x) = y_m + e\frac{b^{m+1}}{1-b}$,

$y(x') = y_{m'} + e'\frac{b^{m+1}}{1-b}$,

so ist $|y(x) - y(x')| = |y_m - y_{m'} + (\varepsilon - \varepsilon')\frac{b^{m+1}}{1-b}|$,

$|y(x) - y(x')| < \underbrace{|y_m - y_{m'}|}_{\eta_1} + \underbrace{|(\varepsilon - \varepsilon')\frac{b^{m+1}}{1-b}|}_{\eta_2}$

und also

$|y(x) - y(x')| < \eta_1 + \eta_2 < \eta$. In Worten:

Wir nehmen erstlich m so groß, daß $(\varepsilon - \varepsilon') \cdot \frac{b^{m+1}}{1-b} < \eta_2$, dann nehmen wir x' so nahe an x, daß $y_m - y_{m'} < \eta_1$ ist; so wird

$y - y' < \eta_1 + \eta_2$, d.h. kleiner als irgend ein vorgegebenes η. Wir rekapitulieren:

Da die Breite des Streifens mit wachsendem m beliebig klein gemacht werden kann und andrerseits die Näherungscurve y_m eine stetige Funktion ist, ist auch die Endcurve stetig.

Wir können aber noch mehr über die Endcurve aussagen. Es ist uns möglich bestimmte Punkte, die ich Knoten und Scheitel nennen will, von vornherein in geschlossener Form anzugeben.

Zunächst die Knoten:

Der Cosinus eines Winkels ist Null, wenn das Argument ein ungerades Vielfache von $\pi/2$ ist. Wir setzen nun $x = \frac{2q+1}{2a^m}\pi$, wo q eine ganze Zahl ist. Dann ist, $a^m x = (2q+1)\pi/2$,

$\cos a^m x\pi = \cos (2g+1)\pi/2 = 0$, aber auch $\cos a^{m+1} x\pi = \cos a^{m+2} x\pi = \dots = 0$, da wir a als ungerade Zahl voraussetzten, und jede ungerade Zahl mit einer andern ungeraden Zahl multipliziert wieder eine ungerade Zahl giebt *):

Ist also $x = \frac{2g+1}{2a^m}$, wo g eine ganze Zahl ist so hat an dieser Stelle nicht nur die mte Teilcurve einen Knotenpunkt, sondern auch jede folgende Teilcurve und die Endcurve stimmt an dieser Stelle hinsichtlich ihrer Ordinate mit der $(m-1)^{ten}$ Näherungscurve überein. - Wäre $2g+1$ durch a teilbar, so würde der in Rede stehende Knotenpunkt schon bei einer früheren Näherungscurve aufgetreten sein; diese Unterscheidung brauchen wir aber fernerhin nicht weiter zu beachten. -

Da der Exponent m und ebenso g eine unbegrenzte ganze Zahl ist, so folgt nebenbei, dass die Knotenpunkte im Gebiete der Variablen x überall dicht liegen d.h. dass in jedem Teilintervalle immer noch Knotenpunkte liegen wenn nur m grofs genug genommen ist.

---

*) Offenbar hat Weierstrafs gerade dieses Satzes wegen a als ungerade Zahl gewählt.

Im Prinzip eine Kleinigkeit schwieriger, aber auch wichtiger, sind die Scheitel.

Es sei jetzt $x = \frac{g}{a^m}$, wo g wieder eine ganze Zahl ist. Dann wird $\cos a^m x\pi = \cos g\pi = (-1)^g$. Da a ungerade ist, so ist auch

$$\cos a^{m+1} x\pi = \cos ag\pi = (-1)^g$$

und ebenso für alle folgenden Glieder, so daß wir das Resultat haben:

Haben wir einen Scheitel vor uns d. h. ist $x = \frac{g}{a^m}$, unter g eine ganze Zahl verstanden, so bekommen alle Glieder der Weierstraß'schen Reihe vom m^{te} Gliede an den Wert $(-1)^g$.

Infolgedessen läßt sich die Reihe sehr gut summieren. Es kommt

$$y = y_{m-1} + (-1)^g \frac{b^m}{1-b} \text{ . Mithin:}$$

Für einen Scheitel ist die Endordinate zwar nicht gleich der Ordinate der $(m-1)^{te}$ Näherungscurve, ergiebt sich aber aus dieser durch Hinzufügung eines einfachen Terms $(-1)^g \frac{b^m}{1-b}$.

Die Scheitel liegen natürlich auch, aus demselben Grunde wie oben die Knoten, überall dicht auf der Abscissenaxe.

Das Resultat unserer bisherigen Überlegung ist also:

Die Weierstraß'sche Funktion ist überall stetig, in einem Kreisen von beliebig kleiner Breite eingeschlossen und enthält zwei Reihen uns bekannter, überall dicht liegender Punkte. Als stetige Funktion wird sie schon durch die eine dieser Reihen völlig definiert sein.

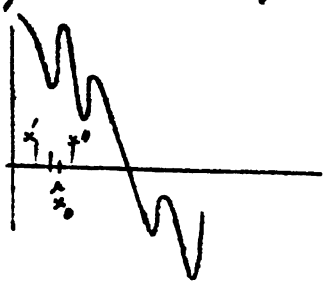
Die nächste Frage, die sich hier nun ganz systematisch anschließt, ist:

Wie steht es mit den 4 Grenzwerten des Differenzenquotienten $\Pi^+, \Pi_+, \Pi^-, \Pi_-$ für jede Stelle x?

Wir werden finden, daß für keinen Punkt x die 4 Derivierten $\Pi^+ \ldots$ übereinstimmen, sodaß also für keinen Punkt x unsere Curve einen eigentlichen Differentialquotienten hat (was eben bewiesen werden soll).

Das Beweisverfahren von Weierstraß ist summarisch, indem er die Stellen x nicht weiter diskussiert. Wir folgen ihm, um nicht zu viel Zeit mit diesem Gegenstande zu verlieren, es wäre indeß leicht, noch tiefer in die Einzelheiten einzudringen.

Sei x_0 die gegebene Stelle, so betrachtet Weierstraß zunächst die m^{te} Näherungscurve. Von



den beiden Scheiteln dieser Näherungscurve, die dem x_0 benachbart sind, wählt er den nächstliegenden (wenn x_0 gerade in der Mitte liegt, den nach links gelegenen). Indem er diesen Scheitel mit $\frac{\varepsilon_m}{a_m}$ bezeichnet, wo ε_m eine ganze Zahl ist, setzt er also

$$x_0 a^m - \alpha_m \begin{cases} > -1/2 \\ \leq +1/2 \end{cases}$$

Dieser so bestimmte Scheitel hat wieder nach rechts und links zwei Nachbarscheitel (auf der m^{ten} Näherungscurve), deren Abscissen x' und x'' heißen sollen. Für x' und x'' bestimmt man die Ordinaten der Endcurve und verbinde die so erhaltenen beiden Punkte $x'y'$ und $x''y''$ mit dem gegebenen Punkte $x_0 y_0$. Auf diese Weise legt man zwei Differenzenpolygonen der Endcurve fest und hat nun zuzusehen, welchem Grenzwert sich die beiden Π nähern, wenn m stets wächst sodaß die Differenzen $x' - x_0$, $x'' - x_0$ beide gegen Null gehen. Wir werden sehen, daß dabei für hinreichend große Werte des Produktes ab

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{y'' - y_0}{x'' - x_0}$$

unendlich große Werte von verschiedenem Vorzeichen gustreben, womit die Existenz eines eigentlichen Differentialpolygones ($\Pi^+ = \Pi_1 = \Pi^-$ =

II_) ausgeschlossen ist.

Indem wir für y' und y'' folgende Werte

$$y' = \sum_0^{m-1} b^\nu \cos a^\nu x'\pi = (-1)^{\varepsilon_m} b^m \sum_0^\infty b^\nu$$

$$y'' = \sum_0^{m-1} b^\nu \cos a^\nu x''\pi = (-1)^{\varepsilon_m} b^m \sum_0^\infty b^\nu$$

in die Differenzenquotienten

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0} \text{ und } \frac{y''-y_0}{x''-x_0}$$

einsetzen, erhalten wir zunächst für $\frac{y'-y_0}{x'-x_0}$, wenn wir die Summe gleich in zwei Teile spalten

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0} = \sum_0^{m-1} b^\nu \frac{\cos a^\nu x'\pi - \cos a^\nu x_0\pi}{x'-x_0} + \sum b^{m+\nu} (-1)^{\varepsilon_{m+1}} \frac{1+\cos a^\nu x_{m+1}\pi}{x'-x_0}.$$

Hierbei haben wir nach Weier-Strass die Differenz $a^m x_0 - d_m$ mit x_{m+1} bezeichnet, so daß also $-1/2 < x_{m+1} \leq +1/2$ ist.

Der Kunstgriff, den wir bei der Spaltung benutzen, ist der, daß wir die Differenzenquotienten der $(m-1)^{ten}$ Näherungscurve und der Restcurve gesondert haben.

Wir gehen nunmehr zur Abschätzung der beiden Differenzenquotienten.

Zuerst der Differenzenquotient der $(m-1)^{ten}$ Näherungscurve.

Wenn wir die Differenz des Cosinus in das Produkt zweier Sinus verwandeln, kommt:

$$\sum_0^{m-1} b^\nu \frac{\cos a^\nu x'\pi - \cos a^\nu x_0\pi}{x'-x_0} =$$

$$\sum_0^{m-1} b^n \; \varepsilon \cdot \frac{\sin a^n \frac{x_0+x'}{2}\pi \cdot \sin a^n \frac{x_0-x'}{2}\pi}{x'-x_0}$$

Durch Erweiterung mit $a^n\pi$ und Annäherung von $\sin/x'-x_0$ in $-i/\frac{x_0-x'}{2}$ folgt.

$$\sum_0^{m-1} b^n \ldots i/\sin = \sum_0^{m-1} - a^n b^n \pi \frac{\sin a^n\left(\frac{x_0+x'}{2}\right)\pi \cdot \sin a^n\left(\frac{x_0-x'}{2}\right)\pi}{a^n \frac{x_0-x'}{2}\pi}$$

Der Kreis, sowie der Sinus dividirt durch sein Argument schwanken beide zwischen $+i$ und $-i$, so dass die Summe zwischen den Grenzen

$$\pm\pi \sum_0^{m-1} a^n b^n = \pm\pi \frac{a^m b^m - 1}{ab-1}$$

enthalten ist. Statt dessen können wir auch einen Factor ε, der zwischen den Grenzen $+i$ und $-i$ liegt, einführen, so dass unsere Summe gleich

$$\varepsilon\pi \frac{a^m b^m - 1}{ab-1} \text{ wird.}$$

Hier dürfen wir $-i$ im Zähler noch streichen, da wir dadurch nur die Grenzen noch erweitern. Also läuft unsere ganze Abschätzung darauf hinaus, dass wir den Differenzenquotienten der $(m-1)^{\text{te}}$ Näherungscurve gleich

$$\varepsilon\pi \frac{a^m b^m}{ab-1}$$

setzen, wo ε eine Größe ist, die jedenfalls zwischen $+i$ und $-i$ liegt.

Indem wir uns nunmehr zum <u>Differenzenquotienten der Resolvente</u> wenden, erhalten wir, wenn wir uns erinnern, dass

$x' - x_0 = \frac{-1 - x_{m+1}}{}$ ist,

$\sum_0^\infty b^{m+\nu} (-1)^{x_{m+1}} \cdot \frac{1 + \cos a^\nu x_{m+1} \pi}{x_{m+1} + 1} = (-1)^{a_m} a^m b^m \sum \frac{1 + \cos a^\nu x_{m+1} \pi}{x_{m+1} + 1}$.

Das erste Glied der Summe $\sum_0^{x'-x_0}$ wird

$\frac{1 + \cos x_{m+1} \pi}{x_{m+1} + 1}$, Hier ist $-1/2 < x_{m+1} \leq +1/2$.

Der Cosinus ist also stets positiv, im ungünstigsten Falle Null. Der Nenner schwankt zwischen $1/2$ und $3/2$. Mithin ist das erste Glied in der unendlichen Summe, die der Restcurve entspricht, $\geq 2/3$. Die folgenden Glieder der Reihe sind ebenfalls sämtlich positiv, wenn nicht Null. Es folgt also, daß die Summe unserer unendlichen Reihe $\geq 2/3$ ist.

Damit haben wir folgende Gleichung erhalten, wo η' eine positive Zahl ≤ 1 und $\varepsilon' = \frac{(-1)^{a_m}}{\eta'} \cdot \varepsilon$ ist (sodaß ε' wie auch ε zwischen $\pm i$ liegt),

$\frac{y_1 - y_0}{x' - x_0} = (-1)^{a_m} a^m b^m \cdot \eta' \left(2/3 + \frac{\varepsilon' \pi}{ab - i} \right)$ oder in Worten:

Der Differenzenquotient der Weierstraß'schen Curve läßt sich gleich setzen

$(-1)^{a_m} a^m b^m \eta' \left(2/3 + \frac{\varepsilon' \pi}{ab - i} \right)$, wo $\eta' \leq 1$ und ε' zwischen $+i$ und $-i$ liegt.

Eine analoge Formel erhalten wir für den rechtsseitigen Differenzenquotienten

$\frac{y'' - y_0}{x'' - x_0} = (-1)^{a_{m+1}} a^m b^m \cdot \eta'' \left(2/3 + \varepsilon'' \frac{\pi}{ab - i} \right)$, nur

ist hier noch der Faktor (-1) hinzugetreten, der in die Rechnung dadurch hineinkommt, daß jetzt $\frac{x_{m+1}^{+1}}{a_m} = x' - x_0$ ist, während oben $\frac{x_{m+1}^{+1}}{a_m} = -(x' - x_0)$ war.

Wir wünschen nunmehr in den Differenzenquotienten zu erreichen, daß der Beitrag, den die Restcurve zum Differenzenquotienten giebt, größer ist als der Beitrag, den die $(m-1)^{te}$ Näherungscurve liefert.

Durch eine qualitative Überlegung kommen wir hier vorab zu dem Schlusse:

Zu dem Zwecke wird man dafür Sorge tragen müssen, daß die Teilwellen, die auf die $(m-1)^{te}$ Näherungscurve aufgesetzt sind, möglichst steil werden. Die Steilheit hängt aber von dem Produkte (ab) ab; wir werden also (a,b) recht groß machen wollen.

Quantitativ gestaltet sich die Sache nunmehr des Genaueren so:

Wir wählen den ungünstigsten Fall $\varepsilon = +i$, dann soll $\vartheta/3 > \frac{\pi}{ab-i}$ sein d.h. $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Dies nehmen wir jetzt an, dann ist:

$\eta'(\vartheta/3 + \varepsilon' \frac{\pi}{ab-i})$ sicher eine positive Zahl p', die als solche von m abhängt. Dasselbe gilt für

$$\eta''\left(\tfrac{2}{3} + e''\frac{\pi}{ab-1}\right) = p''_m.$$

Wir haben zugleich

$$\left.\begin{matrix} p'_m \\ p''_m \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \eta' \\ \eta'' \end{matrix}\right\} \tfrac{2}{3} + \left.\begin{matrix} e' \\ e'' \end{matrix}\right\} \frac{\pi}{ab-1} \Big\} \geqq \left(\tfrac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right);$$

setzen wir letzteren Ausdruck $= q$, so ist

$$\left.\begin{matrix} p'_m \\ p''_m \end{matrix}\right\} \geqq q,$$ wo nun q eine von m unabhängige positive Zahl ist.

Damit folgen für die Differenzenquotienten die Werte:

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0} \geqq (-1)^{\varepsilon_m} \cdot a^m b^m \cdot q,$$

$$\frac{y''-y_0}{x''-x_0} \geqq (-1)^{\varepsilon_m+1} a^m b^m \cdot q.$$

Hiermit haben wir nun die Endformeln, auf welche sich Weierstraß' Beweis für die Nichtexistenz eines eigentlichen Differentialquotienten stützt.

Wir lassen nämlich in unsern Differenzenquotienten das m immer größer und größer werden, damit das x' von links, das x'' von rechts immer mehr an x_0 herankommt. Wenn es einen eigentlichen Differentialquotienten gäbe, dann müßten die beiden Differenzenquotienten sich dabei immer mehr demselben Werte nähern.

Wenn wir aber m in unsern Formeln für die

Differenzenquotienten wachsen lassen, dann fällt es den zweierlei Differenzenquotienten gar nicht ein, sich demselben Limes zu nähern, sie werden unbegrenzt groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen! Also hat die Weierstraß'sche Funktion an der Stelle x_0, die ganz beliebig war, keinen bestimmten Differentialquotienten, w.z.b.w.

Ich will das Wesentliche der Sache noch an einer Figur verständlich machen.

Wir nehmen x_0 in einem unteren Scheitel der mt Näherungscurve und denken uns, das er Scheitel für alle folgenden Näherungscurven bleibt. (Dies setzt voraus, daß alle m gerade sind). Dann nimmt die Höhendifferenz der Nachbarscheitel bei wachsendem m allerdings, ebenso wie der seitliche Abstand derselben von x_0 ab, aber weil wir (a.b) so groß genommen haben, nimmt die Höhendifferenz langsamer ab, als der horizontale Abstand. Die Folge ist, daß die Verbindungsgeraden, die den Differenzenquotienten entsprechen, bei wachsendem m steiler und steiler werden und in keiner Weise gegen einen gemeinsamen Limes

anzuschmiegen.

Hierbei nahmen wir an, daß ein nächster Scheitel der mit Teilcurve unterer Scheitel der $(n+1)^{ten}$ ... Näherungscurven bleibt. So oft sich in der Reihenfolge der ganzen Zahlen x_{n+1}, x_{n+2} ... ungerade befinden, wird x_0 natürlich für die betreffende Teilcurve oberer Scheitel, die Nachbarscheitel werden untere Scheitel. Die Figur kehrt sich also um, der Widerspruch gegen die Annahme eines bestimmten Differentialquotienten bleibt dabei aber der gleiche. —

Unsere Betrachtung der Weierstraß'schen Funktion hat also ergeben, daß die Voraussetzung der Stetigkeit bei einer Funktion noch nicht die Existenz eines Differentialquotienten bedingt. Wollen wir vielmehr von einer stetigen Funktion, daß sie einen ersten, zweiten und höhere Differentialquotienten besitzt, so müssen wir ihr das ausdrücklich als Bedingung auferlegen. —

Blicken wir auf die Entwickelungen dieses Abschnitts zurück, so ergiebt sich folgendes: Wir legten der empirischen Curve gewisse Attribute,

1/ Zusammenhang

2/ Maxima und Minima in endlicher Anzahl in einem endlichen Intervall

3/ Richtung und
4/ Krümmung u.s.w.

von Hause aus bei. Damit etwas Analoges bei dem Funktionsbegriff der Präcisionsmathematik stattfand, mussten wir bei diesem successive die Attribute:

1/ Stetigkeit
2/ endliche Zugahl von Maximis und Minimis im endlichen Intervall,
3/ ersten Differentialquotienten,
4/ zweiten Differentialquotienten u.s.w.

ausdrücklich postulieren.

Es wird so aus der Gesamtheit der Funktionen eine ganz bestimmte Classe von Funktionen ausgeschieden, die aber allgemeiner als die analytischen sind, da wir nicht die Existenz beliebig vieler Differentialquotienten bez. die Geltung der Taylor'schen Reihe verlangen. Ich nenne diese Funktionen mit Jacobi die "vernünftigen Funktionen". (Das Wort vernünftig ist hier nur so zu verstehen, daß die Funktionen das Maass für die Vernunft des Subjekts, das mit ihnen operiert, ergeben)*).

*) Weiter unten sprechen wir in demselben Sinne von "regulären" Funktionen oder "regulären" Curven.

Mit Acceptierung dieses Ausdrucks können wir also sagen:

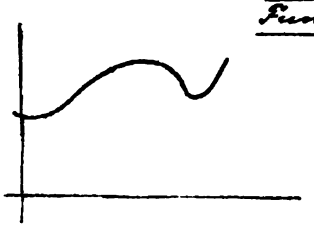
Qualitativ (d. h. der Art nach) finden sich die Attribute, welche man populärer Weise den empirischen Curven beilegt, bei derjenigen Funktionen $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik wieder, welche wir hier die vernünftigen Funktionen nennen.

Damit ist noch nichts über die Frage der quantitativen Übereinstimmung gegeben, über die wir jetzt in dem folgenden Abschnitt etwas sagen wollen.

Annäherung empirischer Curven durch vernünftige Funktionen.

I, 3 Von der angenäherten Darstellung der Funktionen.

Es sei eine empirische Curve gegeben. Die Frage ist:



Können wir eine Funktion $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik so bestimmen, daß sie hinsichtlich der Ordinaten, Richtung und Krümmung hinreichend mit der empirischen Curve übereinstimmt? Oder anders ausgedrückt:

Wie weit kann ich eine empirische Curve durch vernünftige Funktionen in der angedeuteten Be

zeichnung approximieren?

Da wir praktisch bei der Approximation keine komplicierten Funktionen benutzen werden, sondern Funktionen von einfacher analytischer Bauart, so reiht sich an obige Fragestellung sofort die andere:

Wie weit kann ich eine empirische Curve sei es nach Gesamtverlauf, Richtung und Krümmung durch einfache analytisch definierte Funktionen annähern?

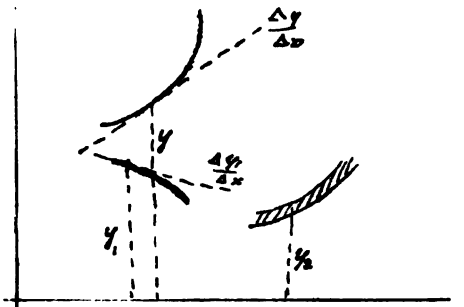
Wir übergehen uns zunächst an einem beliebig vorgelegten Beispiele, dass wir jede empirische Curve durch eine vernünftige Funktion mit beliebiger Annäherung ersetzen können.

Es sei z.B. die Aufgabe, in der nebenstehenden Figur das Gesetz der Ordinaten durch eine Funktion $y = f(x)$ mit hinreichender Genauigkeit darzustellen. Wir schreiben der Curve ein geradliniges Polygon von so großer Seitenzahl ein, daß seine Seiten merklich mit den correspondierenden Curvenstückchen zusammenfallen. Wie dies im Einzelfalle zu machen ist, ich meine, wie lang die einzelnen Seiten zu wählen sind und wie genau die Ordinaten der einzelnen Eckpunkte empirisch zu

geben sein mögen, darüber können wir hier nichts Allgemeines aussagen, jedenfalls aber können wir jede empirische Curve mit der durch die Verhältnisse gebotenen Genauigkeit durch ein geradliniges Polygon ersetzen[1]; und dieses Polygon vertritt uns infolge der Axiome der Geometrie (die wir als bestehend voraussetzen) ein Gesetz $y = f(x)$, welches wir als eine Annäherung an die gegebene Curve betrachten können.

Damit aber haben wir indeß noch keine Function, die wir überall differenzieren können, geschweige denn eine solche, deren Differentialquotienten überall mit der „Richtung" der empirischen Curve übereinstimmen, die Übereinstimmung mit der empirischen Curve bezieht sich nur erst auf die Ordinaten.

Um auch in Bezug auf die Richtung das Entsprechende zu machen, verfahren wir am einfachsten so, daß wir aus der vorgelegten empirischen Curve, deren Ordinate y heißt, eine erste „abgeleitete Curve" herstellen, indem wir für die ursprüngliche Curve die Richtung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



[1] Dies ist ein Resultat der praktischen Erfahrung und tritt als solches an die Spitze unserer mathematischen Überlegung.

an jeder Stelle x berechnen und diese als Ordinate y_1 einer neuen Curve auftragen.

Da die empirische Curve uns nicht genau gegeben ist, sondern nur einen „Streifen" repräsentiert, so wird die Richtung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen ziemlich weiten Genauigkeitsgrenzen schwanken; die „erste abgeleitete Curve" wird also eine ziemlich bedeutende Breite haben; eine Controle liegt darin, daß allemal (innerhalb der zulässigen Genauigkeitsgrenzen) $\int f(x)\,dx = f(x)$ sein muß.

Entsprechend können wir eine „zweite abgeleitete Curve" konstruieren, indem wir die Richtung der ersten abgeleiteten Curve $\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_2$ als Ordinate auftragen. Natürlich ist diese dann in einem noch höheren Maasse unbestimmt, u.s.w. u.s.w.

Nachdem wir nun dieses gemacht, ersetzen wir die Curve y_2 durch ein geradliniges Polygon und erhalten dadurch eine Funktion $f_2(x)$, die zweimal integriert uns eine Funktion $f(x)$ giebt, die die vorgelegte Curve hinsichtlich der Ordinate, Richtung und Krümmung mit der gewünschten Genauigkeit darstellt. Kurz in Formeln:

$$y_2 = f_2(x), \quad y_1 = \int f_2(x)\,dx \quad y = \int y_1\,dx = \iint f_2(x)\,dx^2 = f(x)$$

Ich resumiere noch einmal so:

Um eine vernünftige Funktion, welche zweimal differentiirbar ist, so zu bestimmen, daß sie nicht blos die Ordinate einer vorgelegten empirischen Curve, sondern auch die Richtung der Curve und die Krümmung innerhalb der jeweils gegebenen Genauigkeitsgrenzen darstellt, werde ich mir zu der gegebenen Curve die erste und zweite abgeleitete Curve konstruiren, sogenau dies im empirischen Gebiet möglich ist, diese zweite abgeleitete Curve durch ein geradliniges Polygon ersetzen und dadurch eine Funktion $f_2(x)$ definiren, welche zweimal integrirt diejenige Funktion $f(x)$ ergiebt, welche mir die vorgelegte Curve in der gewollten Weise approximirt.

Dies ist natürlich nur eine Methode zur Erreichung einer vernünftigen Funktion von den gewollten Eigenschaften; jeder Mathematiker wird sich sofort andere Methoden ausdenken können.

Wie dann eine solche Methode im Einzelnen zu handhaben ist, unterliegt der praktischen Entscheidung von Fall zu Fall. Wir bewegen uns hier gar nicht allein auf dem streng logischen Gebiete der reinen Mathematik, sondern auf einem Gebiete, wo außer den rein logischen Schlüssen der Mathematik noch ein gewisses Gefühl für das Praktische, Zweckmä-

fuige und Erreichbare eine bedeutsame Rolle spielt. Da wir hier nicht auf die einzelnen Anwendungsgebiete eingehen können und doch nicht wünschen können, uns stets so unbestimmt auszudrücken, so wollen wir bei der weiteren Frage nach der approximativen Darstellung durch einfache analytische Formeln uns statt der empirischen Curve von vornherein eine „vernünftige" Funktion $y = f(x)$ gegeben denken, die je nachdem einmal, zweimal (oder auch öfter) differentiierbar sein soll, und fragen:

Wie weit ist es möglich eine solche vernünftige Funktion durch einfache analytische Ausdrücke (Polynome, trigonometrische Reihen u.s.w.) zu approximieren?

Wir verpflanzen also unsere approximative Betrachtung ganz auf das Gebiet der reinen Mathematik, wo sich alle Prämissen scharf bezeichnen und daher auch alle Aussagen scharf formulieren lassen. Den angewandten Disciplinen überlassen wir es aber zu beurteilen, was mit unseren Entwicklungen in den einzelnen Fällen praktisch zu machen ist.

Also nunmehr von der

Annäherung einer vernünftigen Funktion durch einfache analytische Ausdrücke.

Die analytischen Formeln, die man gumeist zur angenäherten Darstellung benutzt, sind

a/ endliche Polynome

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^\alpha$$

b/ endliche trigonometrische Reihen

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_\nu \cos \nu x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_\nu \sin \nu x$$

Wir werden nun davon zu reden haben, wieweit vernünftige Funktionen durch diese einfachen Funktionen dargestellt werden können, und ob sich die Approximation auch auf die Differentialquotienten bezieht.

In den Lehrbüchern ist heutzutage die Approximation der Funktionen durch endliche Reihen zurückgeschoben vor der Frage nach der exakten Darstellung durch unendliche Reihen (Taylor'sche, Fourier'sche Reihe). Dies ist aber eine ganz andere Frage, die ihrerseits auch sehr wichtig, in den Anwendungen aber nie zur Geltung kommt. Denn hier kann es sich naturgemäß nur darum handeln, wieweit und in welchem Sinne man durch endliche Reihen approximieren kann. Die Einzel-

tigkeit der modernen Lehrbücher ist nur so zu verstehen, daß die Verfasser nicht aus der Praxis der Wissenschaft heraus schreiben, sondern nur auf Grund theoretischer Beschäftigung; es ist dies im eigentlichen Sinne des Wortes Scholastik.

Die Idee der Approximation ist nun wieder eine doppelte. Man kann:

a) die endlichen Polynome und die endlichen trigonometrischen Reihen nur an einzelnen Stellen an die Funktion resp. ihre Differentialquotienten anschliessen,

b) aus dem Gesamtverlauf die Coefficienten entnehmen, indem man etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht.

Ich beginne mit den Polynomen, welche sich nur an einzelnen Stellen an die gegebene Funktion anschliessen.

Es sei $y = f(x)$ und es seien n Stellen $x = \alpha, \beta \ldots \ldots \nu$ gegeben, an welchen das zu suchende Polynom genau die Ordinate der Funktion geben soll.

Das Polynom niedrigsten Grades, welches nur n Constante enthält, wird uns durch die bekannte Lagrange'sche Interpolationsformel gegeben:

$$y = f(\alpha)\cdot\frac{x-\beta\,.\,x-\gamma\,\cdots\,x-\nu}{\alpha-\beta\,.\,\alpha-\gamma\,\cdots\,\alpha-\nu} + f(\beta)\,\frac{x-\alpha\,.\,x-\gamma\,\cdots\,x-\nu}{\beta-\alpha\,.\,\beta-\gamma\,\cdots\,\beta-\nu}$$

$$\cdots\cdots + f(\nu)\,\frac{x-\alpha\,.\,x-\beta\,\cdots}{\nu-\alpha\,.\,\nu-\beta\,\cdots}$$

Sie liefert uns ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welches an den gegebenen Stellen in der That genau dieselben Ordinaten besitzt wie die Funktion $y = f(x)$. Z. B. für $x = \beta$ ist $Y = f(\beta)$.

Es ist aber eine andere Frage, wieweit an anderen Stellen als den n gegebenen die Lagrange'sche Interpolationsformel unsere Funktion annähert.

Wir setzen, um dies zu entscheiden, unser Polynom $Y = \Theta(x)$ und die gegebene Funktion

$$y = \Theta(x) + \text{einem Rest } R(x).$$

Da $R(x)$ für $x = \alpha, \ldots$ verschwindet, können wir den Faktor $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\nu)$ herausziehen und haben:

$$y = \Theta(x) + r(x)\,.\,\varphi(x)\,.$$

Gleichzeitig schreibe ich die Lagrange'sche Formel

$$\Theta(x) = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}\,.\,\frac{\varphi(x)}{x-\alpha} + \cdots + \frac{f(\nu)}{\varphi'(\nu)}\,.\,\frac{\varphi(x)}{x-\nu}\,.$$

Soll nun die Lagrange'sche Formel brauchbar sein, so muß das $r(x)$ in dem Intervall, in welchem ich die Formel benutzen will, einen unbedeutenden Betrag haben. Wir haben

also folgende centrale Fragestellung:

Kann man das $r(x)$ so in Grenzen einschließen daß $\Theta(x)$ als angenäherter Ausdruck für $f(x)$ zu gelten vermag?

Man bezeichnet das Gebiet, mit dem wir uns hier beschäftigen, gewöhnlich mit dem Worte Interpolation. Dieser Name hat darin seinen Ursprung, daß man sich den Wert x, für den man die Funktion $f(x)$ annähern will, innerhalb des Intervalls $\alpha \ldots \nu$ gelegen denkt. Unsere Frage betrifft aber ebensowohl solche x, welche außerhalb des Intervalls liegen (Problem der Extrapolation)

Von diesem allgemeinen Ansatz gehen wir zu speziellen Fällen über, indem wir annehmen, daß zwei oder mehrere Punkte $\alpha, \beta \ldots$ zusammenfallen d. h. uns an einzelnen Stellen auch der erste und weitere Differentialquotienten gegeben seien.

Sind uns also außer $f(\alpha), f(\beta) \ldots$ auch $f'(\alpha), f'(\beta) \ldots$ gegeben, so entsteht die Frage:

Wie konstruiere ich ein Polynom, welches an den Stellen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nicht nur die gewollten Ordinaten, sondern auch diese vorgegebenen Differentialquotienten hat?

Es läßt sich dies entweder direkt erledigen oder

auch aus der Lagrange'schen Formel durch Grenzübergang ableiten, und es ist dann die Frage, wieweit das so gewonnene Polynom als Approximation für $f(x)$ und seine Differentialquotienten interpolatorisch und extrapolatorisch zu gebrauchen ist. —

Lassen wir insbesondere alle Punkte $\alpha, \beta, \ldots \nu$ in einen Punkt zusammenfallen, so ergiebt sich die Taylor'sche Formel:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(x-\alpha)^{n-1} + k(x)\cdot(x-\alpha)^n.$$

Auf die Ableitung derselben aus der Lagrange'schen Formel, die sich übrigens leicht ergiebt, gehe ich hier nicht ein.

Was uns nun bei der Lagrange'schen Formel und ihren Spezialfällen besonders interessiert, ist, wie wir schon sagten, die Abschätzung des Restgliedes.

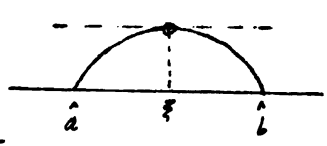
Diese wird bei der Taylor'schen Reihe in allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung gegeben. Dagegen für die Lagrange'sche Formel findet sie sich selten. Ich lehne mich bei den folgenden Betrachtungen besonders an das Buch von

A. Markoff: Differenzenrechnung 1891, deutsch von Friesendorff u. Prümm, Leipzig 1896,

Die Grundlage für die Abschätzung des Restes ist allemal das bekannte Theorem von Rolle. Rolle, ein französischer Geometer, lebte zu der Zeit der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung (1652–1719). Er ist einer von den wenigen alten Mathematikern, die sich nicht mit der Anschaulichkeit der Theoreme genügen liessen, sondern streng logische Definitionen und Beweise verlangten. Natürlich hat er den Satz, der seinen Namen trägt, nicht in der Form, wie wir ihn jetzt gegeben, gefunden oder bewiesen. Aber dem Gedanken, dass hier ein besonderer Satz nötig sei, geht auf ihn zurück. Wir sagen so:

Es sei $f(x)$ eine stetige und mindestens einmal differenzierbare Funktion, die an zwei Stellen a und b verschwindet, dann wird behauptet, dass die Derivierte $f'(x)$ mindestens einmal im Intervall a .... b verschwindet.

Der Beweis gestaltet sich einfach. Wir nehmen an, dass $f(x)$ im Intervalle a ... b positive Werte habe (was keine wesentliche Einschränkung ist [1]) und erinnern uns, dass nach dem Satze



---

1) Hätte sie nur negative Werte, so würde man nach dem Maximum von $-f(x)$ fragen.

von Weierstrass f(x) als stetige Funktion in dem Intervall ihre obere Grenze für eine bestimmte Stelle ξ erreicht. Da wir nun f(x) einmal differentiierbar annehmen, so folgt $f'(\xi) = 0$

Die einfachen Elemente, auf die sich dieser Beweis aufbaut, sind, wie Sie sehen, der Weierstrass'sche Satz und die Voraussetzung der einmaligen Differenzierbarkeit von f(x).

Wir werden jetzt den Satz auf 3 Punkte a, b, c ausdehnen, für die f(x) verschwinden soll, wo dann aus zweimaliger Anwendung des Rolle'schen Theorems folgt, dass $f''(x)$ mindestens einmal im Intervall a ... c verschwindet.

Damit erhalten wir folgenden Satz, den ich in der Form ausspreche, wie wir ihn brauchen werden.

Ist f(x) eine Funktion, die an K Stellen verschwindet, ist ferner f(x) stetig und hinreichend oft differenzierbar, dann wird der $(K-1)^{te}$ Differentialquotient in dem Intervall der genannten Stellen mindestens eine Wurzel ξ haben.

Dieser Satz führt uns nun bei der Lagrange'schen Interpolationsformel folgendermassen zur Abschätzung des Restes.

Wir betrachten die Funktion

$F(y) = f(y) - \Theta(y) - r(x) : \varphi(y)$, wo $\Theta(y)$ [vom $(n-1)^{ten}$ Grade] das Lagrange'sche Polynom ohne Restglied bedeutet und $\varphi(y)$ vom n^{ten} Grade ist; x ist ein beliebiger Wert.

Für die Funktion $F(y)$ kennen wir nun eine Reihe von Nullstellen. Erstens die $\alpha, \beta, \ldots \nu$. In der That wird für diese $\Theta(y) = f(y)$ und $\varphi(y) = 0$, also $F(y) = 0$. Ferner ist x eine Nullstelle. Denn für $y = x$ ist nach Definition $f(x) = \Theta(x) + r(x) . \varphi(x)$; also $F(x) = 0$.

Somit können wir auf $F(y) = 0$ das Rolle'sche Theorem anwenden, indem wir $k = n+1$ nehmen. Es folgt, dass $F^{(n)}(y)$ mindestens eine Wurzel ξ im Intervalle $\alpha \ldots \nu, x$ hat. Rechnen wir diesen n^{ten} Differentialquotienten aus, so kommt

$$F^{(n)}(y) = f^{n}(y) - r(x) . n!$$

($\Theta(y)$ als vom Grade $(n-1)$ und $r(x)$ als Constante gaben keinen Beitrag, $\varphi(y) = y^n + \ldots$ liefert den Zahlenfaktor $n!$): Also haben wir für das betreffende ξ:

$$f^{n}(\xi) - r(x) \, n! = 0 \text{ und damit}$$

$$r(x) = \frac{f^{n}(\xi)}{n!} .$$

Setzen wir diesen auf so einfachem, aber doch sehr sinnreichem Wege gefundenen Wert von $r(x)$ in die Lagrange'sche Formel mit Restglied

ein, so folgt

$$f(x) = \Theta(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

wo also ξ, uns sonst nicht bekannt, irgendwo in dem Intervalle $\alpha, \beta, \ldots \nu, x$ liegt. Wir haben daraufhin:

Die Lagrange'sche Formel ist brauchbar, mit andern Worten, wir dürfen $f(x)$ annähernd durch $\Theta(x)$ ersetzen, sofern der Ausdruck $\varphi(x) \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ für alle im Intervall gelegene ξ eine hinreichend kleine Größe ist. Dabei ist einerlei, ob x zwischen $\alpha \ldots \nu$ oder jenseits derselben liegt. Unsere Formel mit Restglied dient ebensowohl zur Interpolation wie zur Extrapolation.

Wollen wir jetzt speciell die Taylor'sche Formel aufschreiben, so folgt

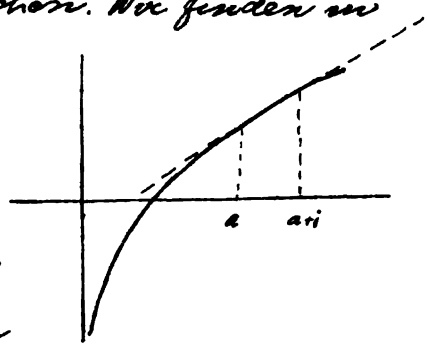
$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)\frac{x-\alpha}{1} + \ldots + f^{(n-1)}(\alpha) \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(\xi) \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!}.$$

Die Form des Restgliedes ist hier dieselbe, die man in der Differentialrechnung bei der Taylor'schen Reihe vorzutragen pflegt.

Übrigens haben wir es bei der Taylor'schen Formel nur mit Extrapolation zu thun, natürlich, da alle $\alpha, \beta, \ldots \nu$ in einen Punkt zusammenfallen.

Ich beabsichtige nun an einer Reihe von Beispielen die Bedeutung der Dinge klarzumachen.

In erster Linie spreche ich von der Anwendung der Formel, die Sie alle bei dem Gebrauch der Logarithmentafeln von ihr machen. Wir finden in den Tafeln den Logarithmus zweier Zahlen a und a+1. Die Frage ist: Dürfen wir geradlinig interpolieren d.h. das Stückchen der Logarithmus-Curve zwischen den Ordinaten log a und log (a+1) durch die Sehne ersetzen?



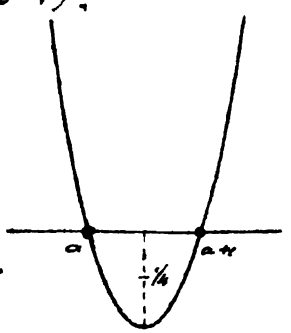
Die Lagrange'sche Formel für den Fall n=2 und $f(x) = \log^{10} x$ wird

$$\log x = \log a + (x-a)\{\log(a+1) - \log(a)\} + R.$$

Der Rest wird

$$R = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-a-1).$$

Wir schätzen diesen noch weiter ab: $f'(x) = \frac{d}{dx}\log x$ ist $= \frac{M}{x}$, wo M der Modul des Logarithmensystems ist. $f''(x)$ wird $= -\frac{M}{x^2}$. Das Produkt $(x-a)(x-a-1)$ ist durch eine Parabel veranschaulicht, die ihre maximale Ordinate $-1/4$ für $x = \frac{a+(a+1)}{2}$ annimmt.



Tragen wir diese Werte in obige Formel ein, so kommt als obere Grenze des Fehlers, den wir durch Weglassung des Restgliedes begehen, $\frac{k}{8\xi^2}$. Also:

Wenn wir einen Logarithmus mit Proportionalteilchen berechnen, so bekommen wir einen Wert, der zu klein ist, aber höchstens um $\frac{k}{8\xi^2}$. Hier ist ξ irgend ein Wert zwischen a und (a+1). Der Fehler ist gewiß kleiner als $\frac{k}{8a^2}$.

Machen wir uns noch die Größe des Fehlers numerisch klar. Wir wollen 7-stellige Tafeln benutzen, wo wir die Logarithmen 5-stelliger Zahlen ohne weiteres angegeben finden. Es ist also a und mithin auch ξ fünfstellig. Den Modul ersetzen wir durch die etwas größere Zahl 0,5 und erhalten, indem wir für a die kleinste 5-stellige Zahl (für welche der Fehler am größten ist) wählen, als obere Grenze des Fehlers

$$\frac{0{,}5}{8 \cdot 10000^2} = \frac{1}{1600\,000\,000}.$$

Wir überzeugen uns also, daß der Fehler, der bei Benutzung der Proportionalteilchen entsteht, wesentlich kleiner ist, als der Fehler, der dadurch herauskommt, daß die Logarithmen der 5-stelligen ganzen Zahlen nur bis auf 7 Stellen mitgeteilt sind.

Als zweites Beispiel gebe ich Erläuterungen

zum Taylor'schen Satz, den wir schreiben:

$$f(x) = f(\alpha) + \cdots + f^{(n-1)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(\xi)\frac{(x-\alpha)^n}{n!}.$$

Diese Taylor'sche Formel hat ihre gute Bedeutung, auch wenn $f(x)$ nicht unbegrenzt differenzierbar ist.

Wenn $f(x)$ unbegrenzt differentiierbar ist, wie man in allen Büchern gewöhnlich voraussetzt, dann kann offenbar $f(x)$ nur in dem Falle gleich der unendlichen Reihe gesetzt werden, wenn der Rest bei wachsendem n unter jeden Betrag hinabsinkt. Dies ist in zahlreichen Fällen für hinreichend kleines $|x-\alpha|$ der Fall; man hat dann ein „Convergenzintervall". Es kann aber auch für alle $|x-\alpha|$ gelten ($f(x)$ = ganze Funktion) oder für gar keine (Beispiel e^{-1/x^2} bei $x=0$).

Im Falle überhaupt Konvergenz stattfindet, ist es interessant, das Verhalten der successiven Näherungscurven zu beobachten. Ich illustriere dies an dem Beispiel

$$y = \log(1+x).$$

Ich will diese Funktion durch die Taylor'sche Reihe für den Punkt $x=0$ darstellen.

Die erste Annäherung giebt uns die Tangente, die zweite eine Parabel u. s. w. Das Hauptinter-

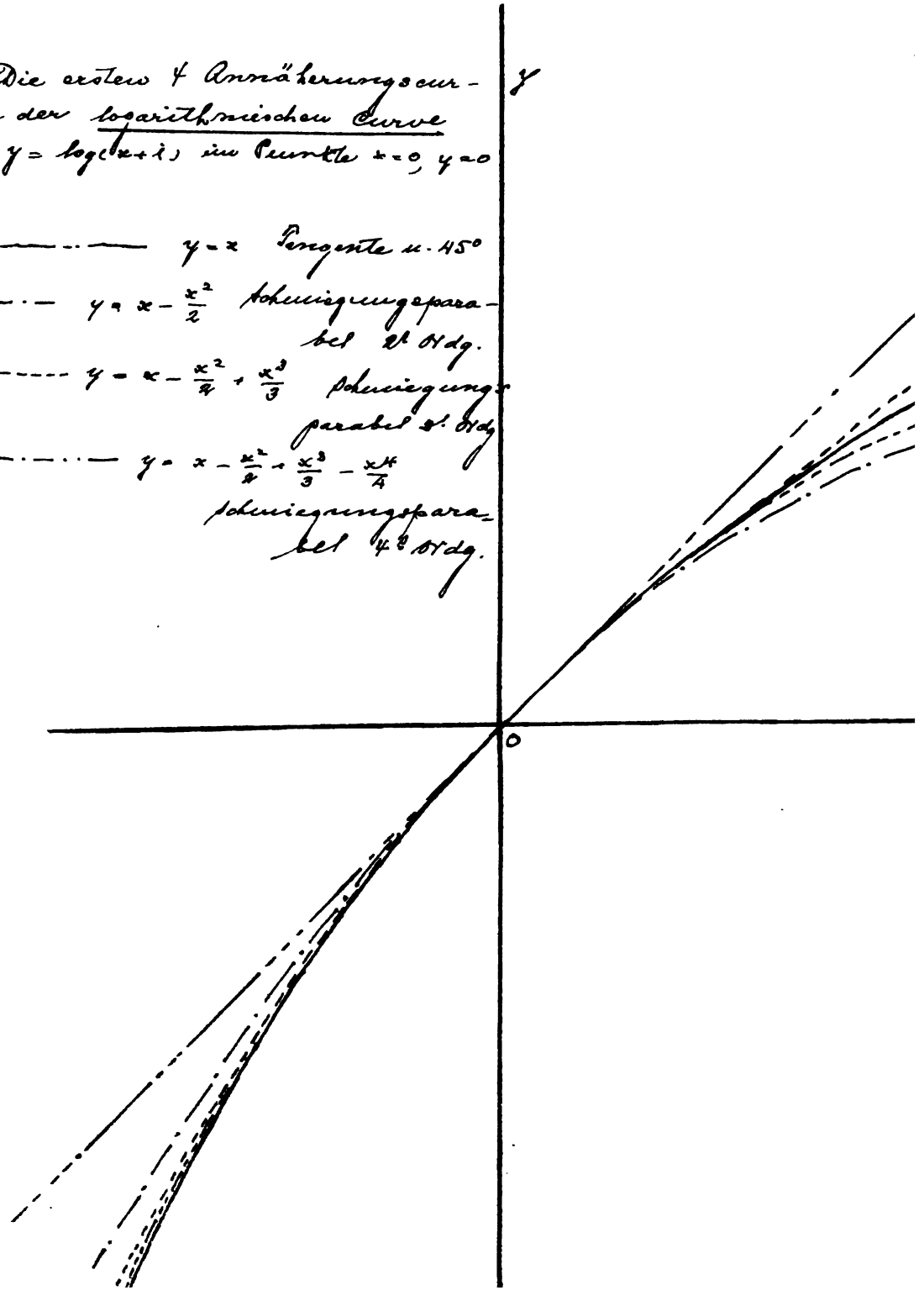
esse ist für uns aber darauf gerichtet, dass die Reihe für $|x| \leq i$ thatsächlich gegen fx convergiert, nicht aber mehr für $x > 1$. Dies kommt in der anliegenden Figur dadurch zur Geltung, dass sich die successiven Näherungscurven in dem Intervall $-i \ldots +i$ mit wachsendem n immer besser an die Logarithmuscurve anschliessen, jenseits $+i$ sich aber abwechselnd plötzlich in die Höhe heben oder steil nach unten senken, sodass von einer Approximation der logarithmischen Curve durch unsere Näherungscurven in keiner Weise die Rede ist.

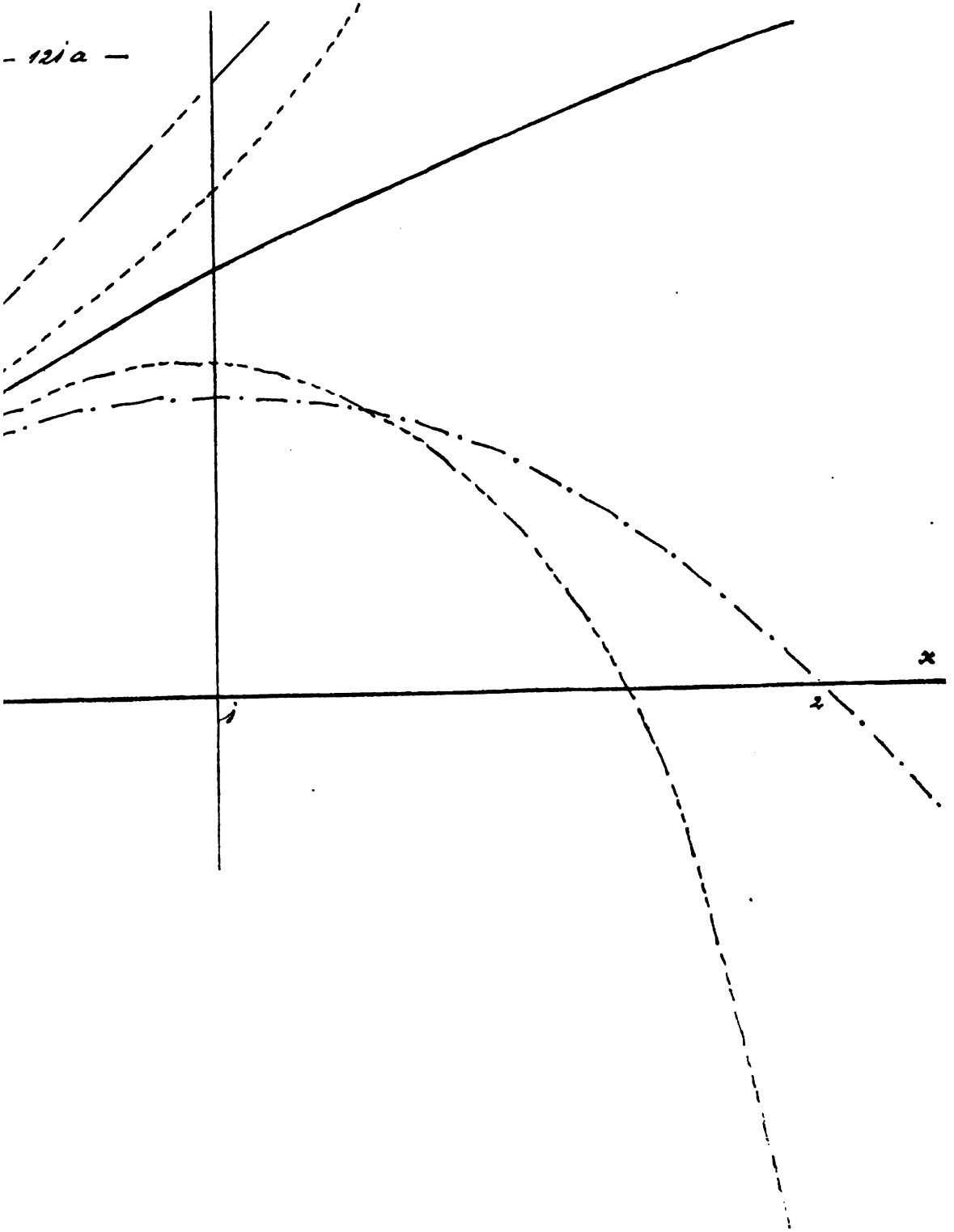
Man bildet übrigens leicht Beispiele, wo eine bestimmte Näherungscurve weit über das Convergenzintervall der unendlichen Reihe, vortrefflich approximiert. Ich kann Sie nur bitten, sich selbst hierher gehörige Beispiele zu bilden und das jeweilige Maass der Annäherung sich durch Figuren lebendig zu machen.

Ich gehe nunmehr zur Behandlung der weiteren Frage über: Wie weit ermöglicht die Lagrange'sche Formel mit Restglied die Approximation des Integrals bez. der Differentialgleichungen einer Funktion $y = f(x)$.[2]

Die ersten 4 Annäherungscurven der logarithmischen Curve

$y = \log(x+1)$ im Punkte $x=0,\ y=0$

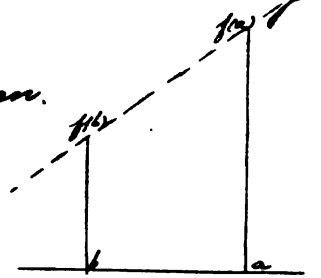



x
1
2

Zunächst die Approximation des Integrals.

Hierüber findet man das Richtige in den meisten Lehrbüchern, da die auf die Lagrange'sche Formel gegründete Auswertung des von einer Curve umspannten Flächeninhalts überall im Gebrauch ist (sog. mechanische Quadratur). Dagegen verweise ich wegen der genannten Fehlerabschätzung, die oft fortgelassen oder nicht so eingehend behandelt wird, auf meine Vorlesung über Integralrechnung (W.S. 1896/7)[1]. Hier gebe ich nur eine kurze Zusammenstellung von 4 wichtigen einfachen Fällen, deren Details Sie in der eben genannten Vorlesung nachlesen mögen.

Es sei $\int_b^a f(x)\,dx$ zu berechnen.



a) Es seien in den Punkten b und a die Ordinaten der Function gegeben, worauf wir die Curve durch die Sehne $\overline{f(b)\,f(a)}$ ersetzen (also in der Lagrange'schen Formel $n=2$ nehmen). Dann berechnet sich

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) + \frac{f''(\xi)(a-b)^3}{12} \text{ s.h.}$$

gleich dem Inhalte des Trapezes plus dem Restgliede, in dem ξ eine neue unbekannte Größe im Intervall $b \ldots a$ bezeichnet

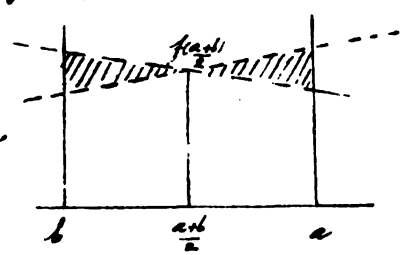
[1] Nicht autographiert.

b/ Eine andere Methode auch geradlinig zu interpolieren ist die, für die Abscissa $\frac{a+b}{2}$ nicht nur die Ordinate $f(\frac{a+b}{2})$, sondern auch die Richtung der Tangente d.h. $f'(\frac{a+b}{2})$ zu geben. Dann kommt:

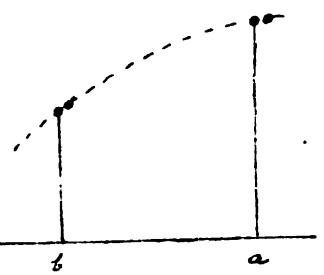
$$\int_b^a f(x)\,dx = f(\tfrac{a+b}{2})(a-b) - \frac{f''(\xi)(a-b)^3}{24}$$ d.h.

der Fehler wird halb so groß wie im vorhergehenden Falle und hat entgegengesetztes Zeichen.

Merkwürdig ist hier, daß die Richtung d.h. $f'(\frac{a+b}{2})$ ganz aus der Endformel herausfällt. In der Tat ist es für den Inhalt des Trapezes, durch welches wir den Curveninhalt approximieren, gleichgültig, in welcher Richtung die betr. Trapezseite durch $x = \frac{a+b}{2}$, $y = f(\frac{a+b}{2})$ hindurchläuft.



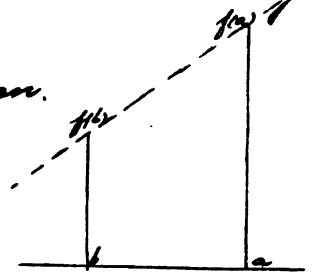
a/ Wollen wir entsprechend für $n=4$ die Lagrange'sche Formel anschreiben d.h. die Curve durch eine Parabel 3ter Ordnung approximieren, so empfiehlt es sich, die Parabel dadurch zu bestimmen, daß man für die Punkte b und a sowohl die Ordinaten als auch die Richtungen der Parabel gibt. Man erhält dann:



Zunächst die Approximation des Integrals.

Hierüber findet man das Richtige in den meisten Lehrbüchern, da die auf die Lagrange'sche Formel gegründete Auswertung des von einer Curve umspannten Flächeninhalts überall im Gebrauch ist (sog. mechanische Quadratur). Dagegen verweise ich wegen der genannten Fehlerabschätzung, die oft fortgelassen oder nicht so eingehend behandelt wird, auf meine Vorlesung über Integralrechnung (W. S. 1896/7)[1]. Hier gebe ich nur eine kurze Zusammenstellung von 4 wichtigen einfachen Fällen, deren Details Sie in der eben genannten Vorlesung nachlesen mögen.

Es sei $\int_b^a f(x).dx$ zu berechnen.



a) Es seien in den Punkten b und a die Ordinaten der Punkten gegeben, worauf wir die Curve durch die Sehne $f(b)\,f(a)$ ersetzen (also in der Lagrange'schen Formel $n=2$ nehmen). Dann berechnet sich

$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) + \frac{f''(\xi)(a-b)^3}{12} \text{ u.s.}$$

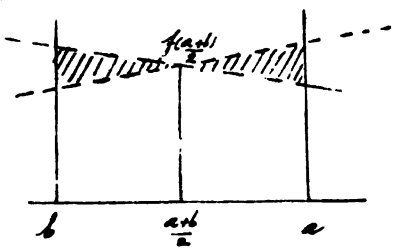
gleich dem Inhalte des Trapezes plus dem Restgliede, in dem ξ eine nur unbekannte Größe in dem Intervall $b \ldots a$ bezeichnet

[1] Nicht autographiert.

b/ Eine andere Methode auch geradlinig zu interpolieren ist die, für die Abscisse $\frac{a+b}{2}$ nicht nur die Ordinate $f(\frac{a+b}{2})$, sondern auch die Richtung der Tangente d.h. $f'(\frac{a+b}{2})$ zu geben. Dann kommt:

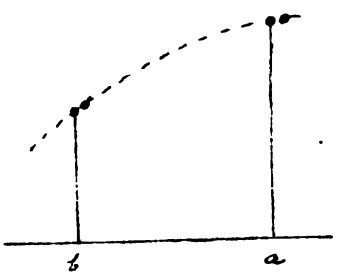
$$\int_b^a f(x)\,dx = f(\tfrac{a+b}{2})(a-b) - \frac{f''(\xi)(a-b)^3}{24}$$ d.h.

der Fehler wird halb so groß wie im vorhergehenden Falle und hat entgegengesetztes Zeichen.



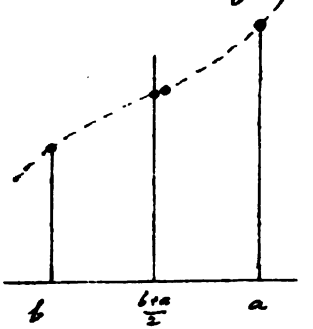
Merkwürdig ist hier, daß die Richtung d.h. $f'(\frac{a+b}{2})$ ganz aus der Endformel herausfällt. In der Tat ist es für den Inhalt des Trapezes, durch welches wir den Curveninhalt approximieren, gleichgültig, in welcher Richtung die betr. Trapezseite durch $x = \frac{a+b}{2}$, $y = f(\frac{a+b}{2})$ hindurchläuft.

a/ Wollen wir entsprechend für $n=4$ die Lagrange'sche Formel anschreiben d.h. die Curve durch eine Parabel 3ter Ordnung approximieren, so empfiehlt es sich, die Parabel dadurch zu bestimmen, daß man für die Punkte b und a sowohl die Ordinaten als auch die Richtungen der Parabel gibt. Man erhält dann:



$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) - \frac{f'(a)-f'(b)}{2}(a-b)^2 + \frac{f'''(\xi)}{720}(a-b)^5$$ (Einfachster der sog. Euler'schen Formel).

d/ Eine andere Art, die cubische Parabel festzulegen, ist die, sie durch die Endpunkte der Ordinaten $f(b)$ und $f(a)$ und durch den Endpunkt der Ordinate $f(\frac{a+b}{2})$ mit vorgegebener Richtung f' gehen zu lassen. Dann fällt wieder f' für die Mittelordinate in der Endformel heraus. Es wird



$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}(a-b) - \frac{f'''(\xi)}{2880}(a-b)^5.$$

Die letzte Zeile enthält die Inhaltsbestimmung, die bei der sogenannten Simpson'schen Regel in Anwendung kommt. Ich mache hier vielleicht folgende Notiz, die weiter in der Litteratur zu verfolgen ist:

Auch bei der Simpson'schen Formel fällt ein Datum, nämlich $f'(\frac{a+b}{2})$ heraus. Gauss hat principiell untersucht, wie man n Punkte im Intervall wählen muss, damit von den zugehörigen Daten bei der Ausführung der Integration möglichst viele in Wegfall kommen.

Als Litteratur über diesen wichtigen Gegenstand führe ich das Buch von Markoff an und vielleicht den Ingenieur Kalender, die Hütte, in dem auch die genannten Formeln, aber (in der mir zur Verfügung stehenden Auflage) mit falschen Zahlenkoeffizienten in den Restgliedern gegeben sind.

Was nun die Frage angeht, wieweit die Laurentsche Formel mit Restglied den Differentialquotienten von $f(x)$ approximiert, so machen wir folgenden Ansatz:

Die Funktion $f(x) - \Theta(x) = 0$

hat n uns bekannte Wurzeln $\alpha, \beta \ldots \nu$.

Vergleichen wir jetzt $f(x)$ mit $\Theta'(x)$, so fragen wir vor allem nach den Wurzeln der Gleichung

$$f'(x) - \Theta'(x) = 0.$$

Aus dem Rolle'schen Theorem können wir sofort sagen, daß sie mindestens $(n-1)$ Wurzeln $\alpha', \beta' \ldots \mu'$ zwischen $\alpha \ldots \nu$ hat. Nun ist der Ansatz, den ich hier vorschlage, der, daß wir unter $\psi(x)$ das Produkt $(x-\alpha') \ldots (x-\mu')$ verstanden,

$$f'(x) = \Theta'(x) + s(x) \cdot \psi(x)$$

setzen, wo man $s(x)$ ganz analog wie $r(x)$ in der Stammformel abschätzen kann.

Es folgt leicht

$$s(x) = \frac{f^{(n)}(\xi')}{(n-1)!},$$ so daß das Resultat so in Worte zu fassen ist:

So gut wir setzen können

$$f(x) = \Theta(x) + \delta \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \varphi(x),$$

genau so gut haben wir eine Annäherungsformel für den Differentialquotienten

$$f'(x) = \Theta'(x) + \delta \frac{f^{(n)}(\xi')}{(n-1)!} \cdot \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ das Produkt der neuen Faktoren $(x-\alpha'), \ldots (x-\mu')$ ist und ξ' eine nur unbekannte Größe im Intervall $\alpha' \ldots \mu', x$.

Im Einzelfalle muß man natürlich zusehen, wie man sich mit der Funktion $\psi(x)$ zurecht findet. Kann man die Wurzeln von $\psi(x)$ nicht einzeln bestimmen, so kann man den Wert von $\psi(x)$ doch abschätzen, u.s.w. u.s.w. —.

Ich möchte an dieser Stelle noch einen Passus einflechten, um den Begriff der

analytischen Funktion

allgemein zu besprechen und klarzulegen, wieweit derselbe hier eingreift, oder vielmehr nicht eingreift.

Wir gehen von der Taylor'schen Formel aus:

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} f(\xi).$$

Ich bemerke hier ausdrücklich, daß die Taylor'sche Formel mit Restglied nicht die unbeschränkte, sondern nur die n-malige Differentiierbarkeit der Funktion f(x) voraussetzt. Ich füge der Deutlichkeit halber noch hinzu: In den Anwendungen wird die vorstehende Formel noch häufig so gebraucht, daß man in dem Intervalle, mit dem man sich beschäftigt, das Restglied vernachlässigen darf.

Wann nennen wir f(x) nun eine analytische Funktion?

Dazu sind zwei Bedingungen erforderlich:

Erstlich muß es formal möglich sein die Taylor'sche Formel bis ins Unendliche fortzusetzen d.h. es müssen unbeschränkt viele Differentialquotienten existieren.

Und zweitens muß der Rest bei wachsendem n beliebig klein werden.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann darf man in dem betrachteten Intervall

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots \text{ in inf.}$$

setzen.

Es ist üblich die endliche Formel mit Restglied den Taylor'schen Satz, die unendliche Formel die Taylor'sche Reihe zu nennen, sodaß wir jetzt sagen

können:

$f(x)$ heißt in der Umgebung der Stelle $x = \alpha$ eine analytische Funktion, wenn es innerhalb eines den Punkt α umgebenden Intervalls durch die Taylor'sche Reihe genau darstellbar ist.

Damit ist schon gesagt, daß der Begriff der analytischen Funktion nur der Präzisionsmathematik angehört. Wir erwähnen ferner, daß man sich erst in neuerer Zeit die Bedingungen klar gemacht hat, unter denen die Taylor'sche Reihe eine Funktion in einem Intervalle darstellt.

Die alte Ansicht war, daß hierzu allein schon die formale Convergenz der Reihe genüge. Dass einzelne Punkte eine Ausnahme bilden können, hatte allerdings schon Cauchy bemerkt. Es giebt aber Funktionen, die unbegrenzt differentiierbar sind und die an keiner Stelle durch die Taylor'sche Reihe dargestellt werden. In dieser Hinsicht hat *A. Pringsheim* 1893 in Chicago, Papers[1] und Math. Ann. 44 einen gewissen Abschluß erreicht, indem er angab, welche Bedingungen zu der unbegrenzten Differentiierbarkeit der Funktion noch hinzukommen müssen, damit die Taylor'sche Reihe

---

[1] Mathematical papers read at the International Mathematical Congress held in Chicago 1893; New-York 1896.

die Funktionen wirklich darstellt, damit also der Rest für wachsendes n unter jede vorgegebene Größe herabsinkt.

Mit dem Umstande, daß diese verschiedenen Dinge nicht immer scharf geschieden sind, hängt die von uns schon wiederholt genannte Ansicht (die man in vielen Büchern findet), gewiß-los zusammen, daß in der Natur nur analytische Funktionen vorkommen.

Wenn man diese Ansicht näher prüft, so ergibt sich, daß sie aus 2 Quellen hervorgewachsen ist:

1) aus der Meinung, daß in der Natur nur Funktionen vorkommen, die differentiierbar und damit unbegrenzt oft differentiierbar sind (einer Auffassung, die für die populäre Auffassung mit der Stetigkeit der Naturerscheinungen gegeben erscheint);

2) aus dem Umstande, daß man von der Notwendigkeit der Pringsheim'schen Bedingungen nichts wußte und sich um sie keine Sorge machte.

Ich stelle einer solchen Ansicht natürlich die andere entgegen, daß wir es bei den Naturvorgängen unmittelbar nur mit Funktions-

streifen zu thun haben und daß die Entscheidung der Frage, ob es sich empfiehlt, die Naturvorgänge präcisirungsmathematisch auf bestimmte Classen stetiger Funktionen stetiger Variabler zu beziehen, über unser Wahrnehmungsvermögen hinausgeht und in das Gebiet der Metaphysik hinüberführt.

Ganz etwas anderes ist es aber, wenn die Mathematiker aus mathematischen Gründen die analytischen Funktionen bevorzugen, und ich will hier in einem Anhange etwas über

die mathematischen Vorzüge der analytischen Funktionen.

sagen.

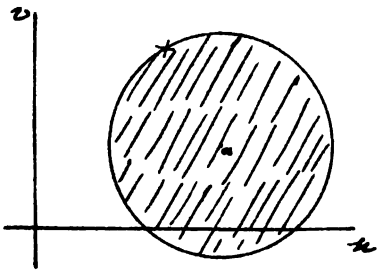
Diese liegen in dem Umstande begründet daß man die analytischen Funktionen auch für complexes $x = \xi + i\eta$ definieren kann. Setzt man den Wert $x = \xi + i\eta$ in die Taylor'sche Reihe ein, so erhält man sofort die Entwickelung der Funktion $f(x)$ für complexe Variable. Umgekehrt aber beschränkt sich die Theorie der complexen Funktionen auch auf die so entstehenden analytischen Funktionen. Also:

Die analytischen Funktionen einer Variablen

aber auch allgemein die analytischen Funktionen schlechtweg gestatten eine Erweiterung auf complexe Variable.

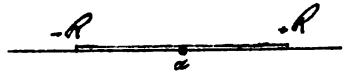
Wie sich dies im Einzelnen gestaltet, muß in einer Vorlesung über Funktionentheorie entwickelt werden. Ich kann hier nur einzelne springende Punkte hervorheben.

Zunächst über das Convergenzgebiet der Taylorschen Reihe.



Die Funktionentheorie zeigt, daß das Convergenzgebiet der Taylor'schen Reihe für einen Punkt x in der complexen Ebene ($x = a + iv$) diejenige um a als Mittelpunkt herumgelegte Kreisfläche ist, deren Peripherie durch den nächst-gelegenen singulären Punkt der Funktion hindurchgeht. (Wie die Reihe sich auf der Peripherie verhält, bleibt zweifelhaft und ist von Fall zu Fall zu entscheiden).

Beschränken wir uns auf reelle Veränderliche, so hat dieser Satz hier offenbar folgende Tragweite:

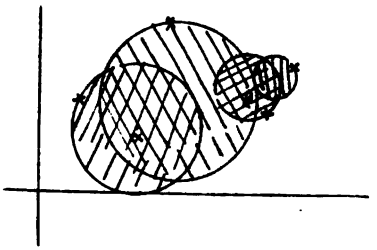
Das Convergenzgebiet er- 

streckt sich im Reellen immer gleich weit nach rechts und links von der betrachteten Stelle aus, unentschieden bleibt aber, wie sich die Reihe in den Endpunkten verhält.

Ich erläutere aus der Theorie der complexen Funktionen noch die Begriffe: Funktionselement und analytische Fortsetzung.

Man nennt nach Weierstraß die Gesamtheit der Werte, die eine Funktion im Konvergenzgebiet der einzelnen Taylor'schen Reihe annimmt, ein Funktionselement der analytischen Funktion. Es ist also die Funktion im Innern des Convergenzkreises durch das Funktionselement definiert.

Man kann nun aber in zahlreichen Fällen über dieses Gebiet weiter hinausgehen, indem man innerhalb desselben einen neuen Wert β giebt und die Reihe nach Potenzen von $(\alpha - x)$ in eine andere nach Potenzen von $x - \beta$ umsetzt. Diese neue Reihe convergiert in einem Kreise, der möglicherweise über den ersten hinübergreift. Man bekommt also eine Definition der Funktion für ein neues Stück der complexen Ebene. Diesen Pro-



setz, den man gegebenenfalls beliebig weiterführen kann, bezeichnet man als analytische Fortsetzung der Funktion.

Zusammenfassend werden wir also sagen: Die ursprüngliche Reihe ergibt unmittelbar nur ein erstes Element der in Betracht kommenden analytischen Funktion, nämlich soweit der Convergenzkreis des Punktes α reicht. Man kann aber durch sog. analytische Fortsetzung (allgemein zu reden) über den ersten Bereich hinausgehen und so die Funktion in immer größeren Bereichen definieren. Die analytische Funktion schlechthin genommen ist der Inbegriff des ersten Elementes und der aus ihm durch Wiederholung des geschilderten Prozesses entstehenden analytischen Fortsetzungen.

Die nähere Ausführung gehört natürlich in eine Vorlesung über analytische Funktionen. Für uns kommt mehr die philosophische Seite der Sache in Betracht. Wir fragen zunächst:

Was müssen wir von einer analytischen Funktion wissen, damit wir ein Funktionselement derselben kennen (aus dem wir dann fernerhin auf den Gesamtverlauf der Funktion schließen

können)?

Offenbar ist dazu erforderlich, aber auch ausreichend, daß wir die Coefficienten $f(x)$, $f'(x)$ ... in der zum Punkte $x = a$ gehörigen Taylor'schen Entwickelung kennen. Diese sind als Limiten von Differenzenquotienten definiert, so daß sie festgelegt sind, wenn wir ein beliebig kleines (aber endliches) Stück der Curve bei $x = a$ kennen. Damit haben wir das Ergebnis:

Das Funktionselement seinerseits ist bei einer analytischen Funktion durch ein beliebig kleines Stück der Curve $y = f(x)$ vollkommen gegeben.

Sie sehen, welche besondere Bewandnis es mit den analytischen Funktionen hat. Sie werden bereits durch ein beliebig kleines Stück in ihrem Gesamtverlauf gegeben, aber wohl verstanden nur im Sinne der Präzisionsmathematik, da sich nur hier die Coefficienten $f(a)$, $f'(a)$ ... als Limiten von Differenzenquotienten (mit absoluter Schärfe) definieren lassen.

Wenn wir uns jetzt wieder nach der mathematischen Darstellung der Naturerscheinungen umschauen, so macht man gewöhnlich den Ansatz, daß man die Coordinaten x, y, z als analytische

Funktionen der Zeit t anschreibt:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Dies führt nach unseren obigen Bemerkungen zum vollkommenen Determinismus, die Bahn eines Teilchens in einem noch so kleinen Zeitintervall legt unverbrüchlich die Bahn in allen folgenden Zeiten fest. Wir müssen daher sagen:

Wenn es wahr ist, daß in der Natur nur analytische Funktionen vorkommen, daß insbesondere die Bewegung jedes einzelnen Teilchens durch analytische Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ geregelt wird, dann ist zwingend richtig, daß der Verlauf der Welt durch ihr Verhalten in einem kleinsten Zeitintervall voraus bestimmt ist.

Das sind Folgerungen, die manchem unsympathisch sind. Daher findet man dieser ersten Ansicht verschiedentlich die andere gegenübergestellt, wonach die Bahnen nicht durch analytische Funktionen, sondern nur durch Differentialgleichungen mit analytischen Coefficienten gegeben sind. Also etwa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{analytische Fkt. von } x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

. . . . . .

Diese Auffassung ist die, welche sich aus dem Studium der theoretischen Mechanik heraus gebildet hat

Dies führt nicht zu ganz denselben strengen Folgerungen wie oben. Es können nämlich die Lösungen solcher Differentialgleichungen mit analytischen Coefficienten sogenannte „Verzweigungsstellen" darbieten, wo es fraglich ist, ob der Punkt auf der einen oder andern Bahn weitergeht. (Man denke an die Beziehung zwischen den allgemeinen Integralcurven einer Differentialgleichung erster Ordnung und den singulären Lösungen, welche als Enveloppe der ersteren auftreten können).

In einem solchen Verzweigungspunkt wäre dann nach der genannten Ansicht die Bewegung eines Punktes nicht allein durch die allgemeinen mechanischen Naturgesetze bestimmt, sondern es ist die Möglichkeit offen gelassen, daß der Punkt hier noch durch einen außermechanischen Anlaß determiniert wird.

Besonders hat J. Boussinesq in Paris diese Idee mit Leidenschaft verfolgt und glaubt geradezu in dem Umstande, daß bei der Integration der Differentialgleichungen mit analytischen Coefficienten sich solche Verzweigungsstellen einstellen können, den Platz gefunden zu haben, wo in die allgemeine

mechanische Weltordnung eine andere Potenz (biologischer oder ethischer Art) sich einmengen kann. Er meint durch das Auftreten solcher Stellen sowohl das Vorhandensein des freien Willens, als auch den Unterschied zwischen lebender und toter Materie erklären zu können. (Es entscheidet also das Princip des lebenden Organismus in einem solchen Verzweigungspunkte über den Weg des betreffenden Massenpunktes) Man vergleiche in dieser Beziehung die Publikation:

J. Boussinesq: Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et la liberté morale, Paris 1879 (Gauthier-Villars).

Sie verstehen, welche Kritik ich an dieser Auffassung üben werde.

Es handelt sich bei Boussinesq überall um Ideen der Präzisionsmathematik (Bestimmtheit einer analytischen Funktion durch ein kleines Stück u.s.w.) Wenn wir uns aber erinnern, daß alle Naturbeobachtungen nur mit beschränkter Genauigkeit möglich sind, so erscheint es als eine durch Nichts bewiesene Annahme zu sagen, daß bei der Natur selbst die soeben besprochenen Beziehungen der Präzisionsmathematik zugrunde liegen. Soll es überhaupt die Präzisionsmathematik sein, so erinnern wir daran,

daß diese auch andere Ideen enthält, z.B. diejenige der unstetigen Funktionen von unstetigen Variablen die eben so gut bei der mathematischen Naturdarstellung zur Verwendung kommen könnten. Es handelt sich aber diese ganze Discussion, bei welcher uns die Beobachtung gar keine Entscheidung liefern kann, von vornherein jenseits der Beobachtung auf rein physischem Gebiet. Hiernach ist die Boussinesq'sche Theorie nicht deshalb mathematisch unsicher, weil sie aus der Voraussetzung heraus, es handle sich in der Natur um analytische Differentialgleichungen, falsche oder unsichere mathematische Folgerungen zöge, sondern weil sie die genannte, unbewiesene Voraussetzung an die Spitze stellt. Wir können zusammenfassend resümieren:

Der schwache Punkt bei allen derartigen Betrachtungen ist der, daß es sich um willkürliche Bevorzugung bestimmter Ideen und Begriffsbildungen der Präzisionsmathematik handelt, während die Beobachtungen in der Natur immer nur angenäherte Genauigkeit besitzen, die auch in sehr verschiedener Weise auf präzisionsmathematische Dinge bezogen werden können. (Vergl. die Idee der vollständig unstetigen Welt nach Art des Kinematographen).

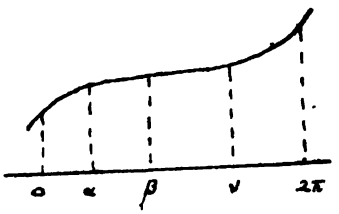
Überhaupt aber bleibt es fraglich, ob das Wesen einer richtigen Naturerklärung auf präzisionsmathematischer Basis zu suchen ist, ob man je über eine geschickte Verwendung der Approximationsmathematik hinausgelangen kann.

Ich vertrete hier also einen durchaus agnostischen Standpunkt, der aber unangreifbar sein dürfte. –

Wir hatten diese ganzen Erörterungen an die Lagrange'sche Interpolationsformel angeknüpft, die uns zum Taylor'schen Lehrsatz und weiterhin zur Taylor'schen Reihe und damit zum Begriff der analytischen Funktion führte. Wir gehen nun zu der

Interpolation durch trigonometrische Reihen

über und betrachten zunächst endliche, dann unendliche Reihen dieser Art.



Wir nennen die unabhängige Variable jetzt ω und nehmen die Funktion periodisch mit der Periode 2π an, d.h. $f(\omega + 2\pi) = f(\omega)$.

Man macht zur approximativen Darstellung einer solchen Funktion gerne den Ansatz durch folgende trigonometrische Reihe:

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega + b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega \Big\} + R = \Phi(\omega) + R,$$

wo der Rest R weggelassen wird, wenn er seinem Betrage nach unbedeutend ist. Die Reihe $\Theta(\omega)$ enthält eine ungerade Anzahl $(2n+1)$ von Constanten.

Zur Aufstellung der Reihe $\Theta(\omega)$ verfahren wir nun zunächst analog wie bei der parabolischen Interpolation und denken uns also vor allem die $2n+1$ Constanten durch $2n+1$ Ordinaten $f(\alpha), f(\beta) \ldots$ der Function $f(\omega)$ festgelegt. Es handelt sich dann darum einen Ausdruck $\Theta(\omega)$ aufzustellen, welcher für $\omega = \alpha, \beta \ldots$ die Functionswerte $f(\alpha), f(\beta) \ldots$ giebt.

Wir können das gesuchte $\Theta(\omega)$ gleich in einer Gestalt anschreiben, die der Lagrange'schen Formel analog ist, nämlich:

$$\Theta(\omega) = f(\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\omega-\gamma}{2}\cdots\sin\frac{\omega-\nu}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdots\sin\frac{\alpha-\nu}{2}} + f(\beta)\frac{\cdots}{\cdots} + \cdots + f(\nu)\frac{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\omega-\beta}{2}\cdots}{\sin\frac{\nu-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\nu-\beta}{2}\cdots}$$

Im Zähler steht jedesmal eine gerade Anzahl Faktoren, sodass es leicht ist, durch Zusammenfassung je zweier Sinus eine Summe von Cosinus und Sinus der Vielfachen der Winkel herauszubringen, was doch unser ursprünglicher Ansatz war. Wir erkennen uns also:

Der Ausdruck $\Theta(\omega)$ lässt sich ganz nach Analo-

gie des Lagrangé'schen Polynoms aufstellen, worauf nur eine formelle Umsetzung nötig ist, um die ursprüngliche Formel:

$$\Theta(\alpha) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha + \ldots + a_n \cos n\alpha \\ + b_1 \sin\alpha + \ldots + b_n \sin n\alpha \end{cases}$$

herauszubringen.

Diese Art der Interpolation wird in der Praxis oft gebraucht, allerdings meist unter der speziellen Annahme, dass alle Ordinaten $f(\alpha), \ldots$ äquidistant sind. Die Berechnung der Reihe $\Theta(\alpha)$ ergiebt sich in diesem Falle einfacher durch eine direkte Methode:

Es seien die äquidistanten Punkte

$$\alpha, \quad \alpha + \frac{2\pi}{2n+1}, \quad \alpha + 2\cdot\frac{2\pi}{2n+1}, \ldots \text{ mit}$$

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \text{ bezeichnet.}$$

Die Funktionswerte an diesen Stellen seien

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \ldots$$

Dann haben wir zur Berechnung der Coefficienten $a_0, a_1, b_1, \ldots$ folgende $2n+1$ lineare Gleichungen:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_0 + \ldots + b_1 \sin\alpha_0 + \ldots + b_n \sin n\alpha_0$$

$$A_1 = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_1 + \ldots + b_1 \sin\alpha_1 + \ldots + b_n \sin n\alpha_1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{2n} = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_{2n} + \ldots + b_1 \sin\alpha_{2n} + \ldots + b_n \sin n\alpha_{2n}$$

Die Auflösung nach den a und b geschieht nun

einfach, wenn man einmal das ganze System mit $\cos k\alpha_i$, das andere Mal mit $\sin k\alpha_i$ multipliziert und dann addiert. Erinnert man sich noch, daß die $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sich um den aliquoten Teil $\frac{2\pi}{2n+1}$ unterscheiden, so kommt als Endresultat, wobei ich die Details übergehe:

$$\sum_i a_i \cos k\alpha_i = a_k \cdot \frac{2n+1}{2}$$

$$\sum_i a_i \sin k\alpha_i = b_k \cdot \frac{2n+1}{2}.$$

Die so gewonnene Interpolationsformel wird in der Praxis sehr oft benutzt, ebenso wie eine andere bei der eine gerade Zahl äquidistanter Beobachtungen vorausgesetzt wird[1]. Z.B. sei in der Lehre vom Erdmagnetismus die Aufgabe gestellt, die Abhängigkeit der Deklination auf einem Breitenkreise von der geographischen Länge zu geben. Man beobachtet dann etwa $2n+1$ äquidistanten Punkten die Deklination[2], berechnet die Coefficienten nach obigen Formeln und erhält so die Funktion durch die geographische Länge als endliche trigonometrische Reihe darge-

---

[1] In der Meteorologie benennt man diese Formeln nach Bessel; siehe dessen Aufsatz in den Astronomischen Nachrichten von 1828: Über die Bestimmung eines Gesetzes einer periodischen Erscheinung.

[2] Oder auch man verschafft sich diese Deklination durch vorherige Interpolation aus Beobachtungen an Nachbarorten.

stellt. Dabei ist der Rest als unwichtig vernachlässigt, ob dies gegebenenfalls gerechtfertigt ist, muß der Rechner beurteilen.

Es ist nun besonders interessant, in der vorstehenden Formel die Stellen, an denen die Ordinaten gegeben sind, unendlich dicht zu wählen. Dann folgt für $\Theta(\alpha)$ eine unendliche trigonometrische Reihe

$$\Theta(\alpha) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha + \dots + a_n \cos n\alpha + \dots + b_1 \sin\alpha + \dots + b_n \sin n\alpha + \dots$$

Wir wollen zusehen, was dabei aus unseren a_k, b_k wird.

Wir bezeichnen den Abstand zweier aufeinanderfolgender Ordinaten $f(\alpha_i)$ und $f(\alpha_{i+1})$, also $\frac{2\pi}{n+1}$ mit $\Delta\alpha_i$. Dann werden unsere Formeln oben

$$a_k = \frac{1}{\pi} \Sigma A_i \cos k\alpha_i \cdot \Delta\alpha_i ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \Sigma A_i \sin k\alpha_i \cdot \Delta\alpha_i ,$$

und, wenn hier n immer größer wird, erhalten wir als Limiten die beiden Integrale:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx .$$

Somit haben wir das Resultat:

Wenn wir zur Grenze ($n = \infty$) übergehen, so erscheint $f(\alpha)$ als unendliche Reihe plus einem unbekannten Rest, wobei das Bildungsgesetz der

Coeffizienten folgendes ist:

$$a_k = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \cos k\alpha \cdot d\alpha$$

$$b_k = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \sin k\alpha \cdot d\alpha.$$

Die so erhaltene Reihe ist die bekannte Fourier'sche Reihe. Indem wir die Untersuchung des Restes verschieben, können wir das Bisherige so zusammenfassen:

Die Approximation von $f(\alpha)$ durch eine unendliche Fourier'sche Reihe ordnet sich als besonderer Fall unter die Approximation durch eine endliche, äquidistanten Ordinaten entsprechende trigonometrische Reihe unter. (In der Praxis werden natürlich immer nur endliche Reihen benutzt. Dementgegen werden in den heutigen mathematischen Lehrbüchern fast nur die unendlichen Reihen behandelt!)

I.4 Nähere Ausführungen zur trigonometrischen Darstellung der Funktionen.

Mit den vorstehenden Erläuterungen ist noch nichts über das Restglied, also die Convergenz, der Fourier'schen Reihe gesagt, auf das ich sogleich eingehe.

Ich bemerke zunächst, dass sich für das Restglied der endlichen trigonometrischen Reihe, soweit ich sehe, in der Litteratur keine bequeme Formel vorfindet.[1] Und doch ist es diese Reihe[2], die in den Anwen-

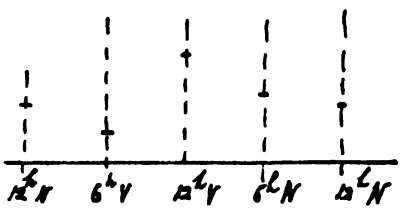
---

1) Vergl. den Vorschlag auf pg 148 (unter der Seite)

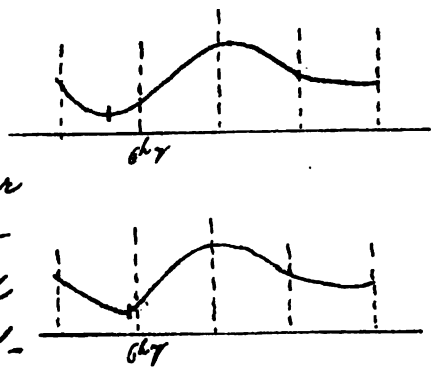
2) bez. die andere, die sich bei Einführung einer geraden Zahl äquidistanter Ordinaten ergiebt.

dungen meist gebraucht wird, wenn man es mit periodischen Erscheinungen (die als Funktionen der Zeit dargestellt werden sollen) zu thun hat. Ich mache hier einige Disciplinen namhaft, die sich dieses Hilfsmittels bedienen: die Meteorologie (Darstellung des Temperaturwechsels als Funktion der Zeit), Lehre vom Erdmagnetismus (Abhängigkeit der magnetischen Elemente auf einem Breitenkreise von der geographischen Länge) und die Elektrotechnik (Änderung der Intensität der Wechselströme mit der Zeit). Daß aber auf die Abrundung des Restes besondere Aufmerksamkeit verwandt werden muß, lehrt ein Resultat, das aus der Praxis der Meteorologie hervorgegangen ist, und das ich hier etwas eingehend schildere, weil es in den ganzen Gedankengang der Vorlesung hineinpaßt.

Wir denken uns die 24 Stunden des Tages als Abscissen auf einer Axe abgetragen und vielleicht für 4 derselben, beispielsweise $12^h N$, $6^h V$, $12^h V$, $6^h N$ die beobachtete Temperatur als Ordinate aufgetragen. Man hat nun versucht, den Verlauf der Temperaturcurve aus diesen 4 Werten mittelst der endlichen trigonometri-



schon Reihe festzulegen. Hierbei hat sich nun (indem man sich darauf verließ, dass das Restglied als unbedeutend zu vernachlässigen sei) das merkwürdige Resultat ergeben, daß das Minimum der Temperatur mehrere Stunden vor Sonnenaufgang liegt. Dieses Resultat, das in sämtliche Lehrbücher überging und übrigens zu den merkwürdigsten Erklärungen Anlaß gab, erwies sich aber als falsch, seitdem man die selbstthätigen Registrirapparate hat. Diese lassen nämlich erkennen, daß das wahre Minimum unmittelbar vor Sonnenaufgang liegt, indem die Curve bis zur Ordinate des Sonnenaufgangs (z. B. bei 6h V), herabsinkt und hier plötzlich wieder stark ansteigt. Diese Bewegung nach unten und das starke Aufsteigen der Curve treten aber bei den interpolatorischen Daten nicht hervor, so daß die interpolatorische Curve hierüber naturgemäß keinen Aufschluß giebt. Wie schon hervorgehoben, ist dieser beträchtliche Fehler durch die Vernachlässigung des Restgliedes entstanden[1]. Wir können



[1] Wegen der Litteratur und der Einzelheiten

hiermit also zu folgendem Resultat:

Wieweit man in der Praxis mit derartigen Interpolationsformeln gehen muss, um hinreichende Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu bekommen, muss in jedem einzelnen Falle erfahrungsgemäss controllirt werden. Ein Beispiel, dass eine rein formale Interpolation ohne diese Controlle zu ganz falschen Angaben führen kann, ist das eben zur Sprache gebrachte Beispiel aus der Meteorologie, das übrigens von den Meteorologen selbst richtig gestellt wurde.

Was nun speciell die „Fourier'sche" Reihe angeht, so ist die Untersuchung über deren Convergenz und darstellende Kraft seit der classischen Arbeit von P. L. Dirichlet, J. f. Math. 4 (1829) Gemeingut aller Lehrbücher und Vorlesungen geworden. Man führt die Untersuchung in der Weise, dass man die $(2n+1)$ ersten Glieder der Reihe in die Summe $S_{2n+1}(\omega)$ zusammennimmt, die sich in folgende Gestalt schreiben läßt:

$$S_{2n+1}(\omega) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega+\varphi) \frac{\sin \frac{2\nu+1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \cdot d\varphi$$

Nunmehr wird untersucht, welchem Limes die

---

siehe den Aufsatz von Ad. Schmidt: Über die Anwendung trigonometrischer Reihen in der Meteorologie, im Programm des Gymnasium Ernestinum zu Gotha, vom Jahre 1894.

ses Integral gegen $f(\omega)$ strebt, wenn n unbeschränkt wächst. Es zeigt sich, dass in zahlreichen Fällen in der That der Limes die darzustellende Funktion $f(\omega)$ ist. Indem ich die Details der Rechnung übergehe, resumiere ich so:

Man kann die Summe der $(2n+1)$ ersten Terme der Reihe in Form eines Integrals geschlossen darstellen und überzeugt sich, dass dieses Integral für $n = \infty$ jedenfalls dann auf unsere Funktion $f(\omega)$ zustrebt, wenn $f(\omega)$ eine stetige Funktion mit einer endlichen Anzahl von Maximis und Minimis ist (sog. Dirichlet'sche Bedingungen), also um so mehr, wenn nach unserer Ausdrucksweise $f(\omega)$ eine „vernünftige" Funktion ist.

Man kann übrigens die Formel $S_{2n+1}(\omega)$ direkt auch benutzen, um zu sehen, wieweit eine endliche Anzahl von Gliedern der Fourier'schen Reihe eine vorgegebene Funktion $f(\omega)$ approximiert, indem man das Integral

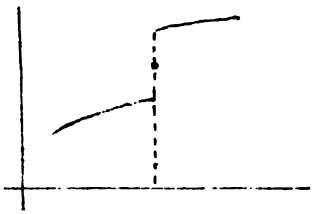
$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega+\varphi) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \cdot d\varphi$$

in geeigneter Weise abschätzt[1]).

Ich erinnere hier noch an eine andere Eigenschaft der Fourier'schen Reihe:

---

[1]) Dieselbe Methode schlage ich für die endliche Reihe vor, die äquidistante Ordinaten benutzt.



Sie hat die Kraft, auch unstetige Funktionen einfacher Art darzustellen d.h. Funktionen mit einfacheren Sprungstellen (die übrigens ebenso wie die Maxima und Minima nur in endlicher Anzahl vorhanden sein sollen). An der Sprungstelle selber ist der durch die Reihe gegebene Funktionswert das arithmetische Mittel aus den Funktionswerten, die man erhält, wenn man sich von links und rechts der Unstetigkeitsstelle nähert (oder in Dirichlet'scher Bezeichnung: $= \frac{f(\omega+0) + f(\omega-0)}{2}$).

Dies sind lauter Dinge, die sich überall in der Litteratur finden. Ich verweise insbesondere auf meine Vorlesung über Integralrechnung. Viel weniger bekannt dagegen ist eine ebenfalls in dieser Vorlesung erwähnte Eigenschaft der endlichen trigonometrischen Reihen, die wohl zuerst Bessel in seiner citierten Arbeit von 1828 zur Sprache gebracht hat.

Wenn ich die Funktion $f(\omega)$ durch eine endliche trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega$$
$$+ b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega$$

darstellen will, so kann ich mir, unbeschadet zu reden, die Aufgabe stellen, die Coefficienten a_k und b_k so zu bestimmen, dass die Approximation eine „möglichst gute" ist. Es liegt dann nahe, einen Ansatz zu machen, der an die Methode der kleinsten Quadrate anknüpft.

Wir bilden uns die Differenz

$$\left.\begin{aligned} f(\omega) - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos\omega - \ldots - a_n \cos n\omega \\ - b_1 \sin\omega - \ldots - b_n \sin n\omega \end{aligned}\right\} = f(\omega) - S(\omega),$$

sehen diese als Fehler der Darstellung an und stellen die Forderung die Summe der Fehlerquadrate, erstreckt über das Intervall 2π, also das Integral:

$$\int_0^{2\pi} (f(\omega) - S(\omega))^2 \, d\omega$$

zu einem Minimum zu machen. Durch diesen plausiblen Ansatz finden wir dann das, was wir die „beste" Approximation der Funktion $f(\omega)$ durch eine endliche trigonometrische Reihe nennen werden. Wenn wir das Minimumproblem behandeln, so ergeben sich unabhängig davon, wie gross wir n nehmen, genau die Fourier'schen Werte der Coefficienten a_k und b_k. Man braucht sogar nicht alle Glieder von 1 ... n hinzuschreiben, sondern kann beliebig viele derselben beim Ansatze weg-

lassen, das Resultat ist für die in Ansatz gebrachten Glieder immer dasselbe.

Ich nehme nur ein Glied mit a_ν heraus und führe hierfür die Rechnung durch. Es läßt sich $\int_0^{2\pi} (f(\omega) - a_\nu \cos \nu\omega)^2 d\omega$ als Funktion von a_ν so ordnen:

$$= \int_0^{2\pi} f(\omega)^2 d\omega - 2a_\nu \int_0^{2\pi} (f(\omega) \cos \nu\omega) . d\omega + a_\nu^2 \int_0^{2\pi} (\cos \nu\omega)^2 d\omega .$$

Wir setzen den Differentialquotienten nach a_ν gleich Null und erhalten:

$$0 = -\int_0^{2\pi} (f(\omega) \cos \nu\omega) \, d\omega + a_\nu \int_0^{2\pi} (\cos \nu\omega)^2 d\omega$$

Das letzte Integral berechnet sich zu:

$$\int_0^{2\pi} (\cos \nu\omega)^2 d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\nu\omega}{2} d\omega = \pi + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\nu\omega}{2} d\omega,$$

sodaß wir in der Tat, da das letzte Integral verschwindet, den Fourier'schen Wert

$$a_\nu = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos \nu\omega \, d\omega$$

erhalten. Die Sache wird nicht geändert, wenn wir mehrere Glieder a_i oder auch b_i nehmen[1], so daß ich mit folgendem Satz abschließe:

Irgend ein endliches Aggregat von Gliedern der endlichen Fourier'schen Reihe ergiebt eine Approximation von $f(\omega)$, welche unter allen Approximationen, die man durch trigonometrische Glieder der

---

[1] Weil nämlich die Produkte $a_i a_k$ oder $b_i b_k \ldots$ mit Integralen multipliziert auftreten: $\int \cos i\omega . \cos k\omega . d\omega$, $\int \cos i\omega \sin k\omega \, d\omega \ldots$, die alle Null sind.

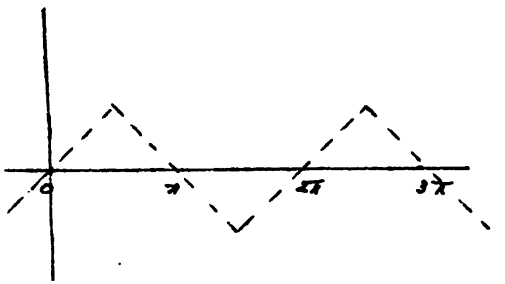
herausgegriffenen Art zu Wege bringt, nach der Methode der kleinsten Quadrate die beste ist.

Wie sich dies im Einzelnen gestaltet will ich an einigen Beispielen durchführen. Vorab bemerke ich, daß es zahlreiche Apparate giebt, welche von der Anschauung aus, daß die Curve $y = f(x)$, gezeichnet vorliegt, die mechanische Berechnung einer Anzahl Coefficienten der Fourier'schen Reihe gestatten. Man nennt diese Apparate in Anlehnung an die englische Ausdrucksweise „harmonische Analysatoren". Die Engländer bezeichnen nämlich die Zerlegung einer Funktion in periodische Einzelterme „harmonische Analyse", wobei das Wort harmonisch daran erinnern mag, daß in der Akustik sich zum ersten Male die Zerlegung von Schwingungen in Einzelschwingungen dieses Charakters aufgedrängt hat. Der Analysator, den ich Ihnen vorführen werde, in der Construktion von Coradi (Zürich) nach den Ideen von Henrici (London), giebt je ein a_ν und ein b_ν für $\nu = 1, 2 \ldots 6$, was das constante Glied a_0 angeht, so ist dieses gleich $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, also ein in der Ausgangsfigur vorkommender Flächeninhalt, und kann als solcher sofort mit einem Planimeter ausgewer-

tet werden.

Des weiteren werde ich Ihnen nun für zwei bestimmte Beispiele die Annäherung durch abbrechende Fourier'sche Reihen empirisch in Zeichnung vorführen, um so lieber als man auf diese Weise sofort eine Menge von Einzelheiten begreift, die in der abstrakten Theorie oft unverstanden bleiben.

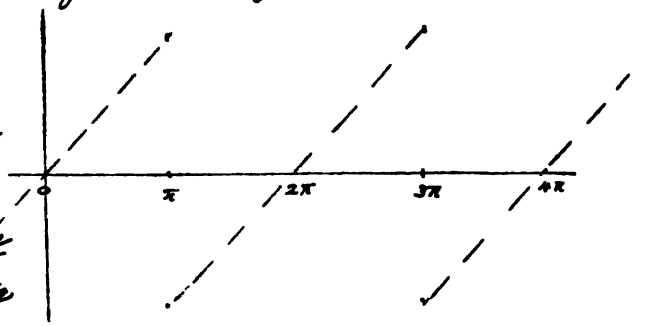
Ich wähle als erstes Beispiel eine Art Wellenlinie, die durch Gerade gebildet ist, die unter 45° an den Stellen 0, π, 2π ... abwechselnd ansteigen und fallen. Man erhält hier folgende Darstellung:



$$f(\omega) = 4/\pi \left(\frac{\sin \omega}{1^2} - \frac{\sin 3\omega}{3^2} + \frac{\sin 5\omega}{5^2} - \dots \right)$$

(Die Cosinusglieder fallen fort, weil $f(\omega)$ eine ungerade Funktion ist).

Das andere Beispiel giebt uns eine Curve, die aus lauter geradlinigen Stücken besteht, welche unter 45° ansteigen, und die sich in der Art ununterbrochen aneinander reihen, daß



die Funktion an den Stellen $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ von dem Werte $+\pi$ nach $-\pi$ springt. Als Darstellungsformel ergiebt sich:

$$f(\omega) = 2\left(\sin\omega - \frac{\sin 2\omega}{2} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \frac{\sin 4\omega}{4} \ldots\right),$$

wo wieder die Cosinusglieder weggefallen sind.

Ich gedenke nunmehr <u>das Wesen des erwähnten Analysators</u> durch detaillierte Zeichnungen zu erläutern, damit Sie das Funktionieren desselben verstehen.

Ich schicke folgende Bemerkung voran:

Um die Coefficienten der Fourier'schen Reihe zu berechnen, haben wir die Integrale

$$a_i = \int_0^{2\pi} \frac{f(x)\cos ix}{\pi}\,dx \quad \text{und} \quad b_i = \int_0^{2\pi} \frac{f(x)\cdot\sin ix}{\pi}\,dx$$

auszuwerten (wo wir $\omega = x$ gesetzt haben und sich die Integrale auf eine Curve beziehen, die sich irgendwie von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ erstreckt). Tatsächlich werden wir solche Integrale im Allgemeinen durch die früher erwähnten Methoden der mechanischen Quadratur berechnen können und sind hierauf sogar angewiesen, wenn wir nur eine discontinuierliche Anzahl von Beobachtungen zur Verfügung haben!) Hirsch hat in seinem Buche:

---

1) Die Fourier'sche Reihe kommt dann gegebenenfalls auf die früher besprochene endliche trigonometrische Reihe mit ihren durch Summen definierten Coefficienten zurück.

Kirsch: Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine, Leipzig 1886 auch graphische Methoden zur annäherungsweisen Berechnung der Coëffizienten entwickelt. Liegt dagegen die Curve gezeichnet vor, so können wir einen continuirlich arbeitenden Apparat anwenden.

Um zu verstehen, wie speziell unser Apparat arbeitet, ist eine Umsetzung der Integrale durch partielle Integration nötig. Wir haben:

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int y \cos ix\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{y \sin ix}{i}\right) - \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin ix}{i}\, dy$$

und ähnlich

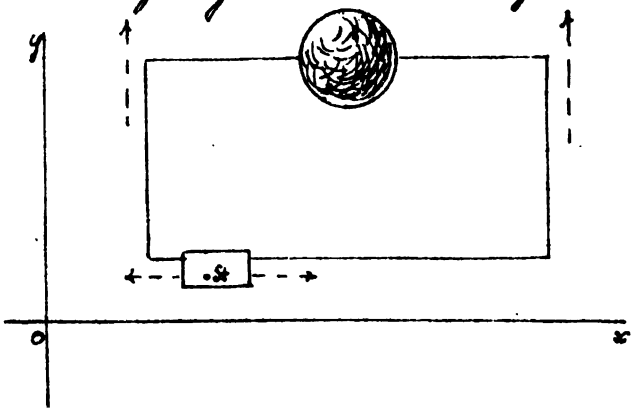
$$b_i = \frac{1}{\pi}\int y \sin ix\, dx = (\qquad) + \frac{1}{\pi}\int \frac{\cos ix}{i}\, dy$$

Nach Einsetzung der Grenzen fallen die ersten Terme rechter Hand fort, sodass die wesentlichen Formeln, an die der Apparat anknüpft, folgende sind:

$\int \sin ix\, dy$ und $\int \cos ix\, dy$ (wo die Integrale immer noch über die Curve hin zu nehmen sind).

Die Auswertung dieser Integrale bewerkstelligt der Apparat nun so:

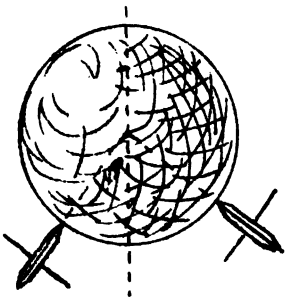
// Zunächst besteht er in der Hauptsache aus einem rechteckigen Rahmen, der



infolge geeigneter Rollenführung nur parallel der y-Axe verschiebbar ist.

2/ An dem Rahmen entlang bewegt sich parallel mit der x-Axe ein Schlitten mit Stift, so daß

3/ durch die combinierte Bewegung des Rahmens und des Schlittens relativ zum Rahmen die Möglichkeit gegeben ist, mit dem Stifte eine beliebig gegebene Curve zu umfahren.



4/ Das wichtigste Organ des Apparates ist nun eine matt geschliffene Glaskugel an der dem Schlitten gegenüberliegenden Seite des Rahmens, die so angebracht ist, daß sie bei der Bewegung des Rahmens (indem sie auf der Unterlage rollt) jeweils eine Drehung um einen Durchmesser parallel der x-Axe erfährt, die mit dy proportional ist.

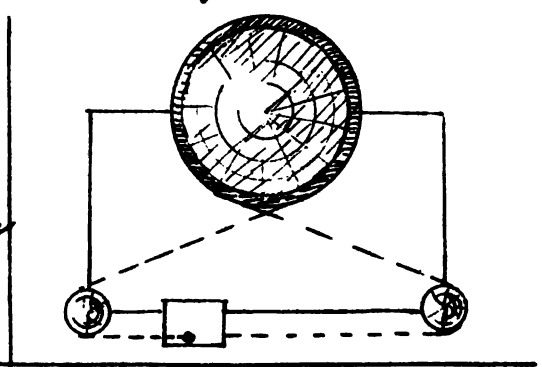
5/ Pressen wir nun an die Glaskugel unter dem Azimut φ eine Registrierrolle an, so wird diese eine Drehung der Kugel aufnehmen, die mit dy.cos φ proportional ist (der hinzutretende constante Faktor hängt von den Dimensionen des Apparates ab). Eine ebensolche Rolle, die unter 90° gegen die erste orientiert ist, registriert die Drehung c'.dy.sin φ.

Beide Rollen sind mit Zählwerken versehen, so daß wir sofort

$\int dy \cos\varphi$ und $\int dy \sin\varphi$ ablesen können.

b) Es ist nun ein weiterer wesentlicher Bestandteil am Apparate vorhanden, der dafür sorgt, daß die Azimute der einen oder anderen Registrierrolle gleich ix werden ($i = 1, 2, \ldots 6$ in unserm Apparat), wie es doch nötig ist, um die Integrale:

$\int dy \cos ix$ und $\int dy \sin ix$ zu erhalten.



γ) Um dies zu erreichen, wird oberhalb der Glaskugel auf dem Apparate eine Messingscheibe aufgesetzt, die je nach der Zahl i in dem zu berechnenden Integral zweckmäßig gewählt werden muß. Die Befestigung dieser Scheibe ist derart, daß ihre Drehung die beiden Registrierrollen mitnimmt. Diese Drehung ihrerseits wird aber dadurch dem x des Fahrstiftes proportional, daß ein dünner Silberdraht, der an den Fahrstift angeknüpft ist, um die Messingscheibe herumgeführt wird; vergl. die obenstehende Figur.

8/ Wähle ich jetzt als Radius der Messingscheibe der Reihe nach 1, 1/2 ... 1/6, dann wird die Drehung der Scheibe und damit das Azimut φ meiner Registerrollen der Reihe nach 1.x, 2.x, ... 6x sein und ich werde an beiden Rollen die beiden Integrale, auf die es für i = 1, 2 ... 6 ankommt, mit solchen Coefficienten multiplicirt, die von den Dimensionen des Apparates abhängen, ablesen können.

Es ist dies also eine äußerst einfache Theorie. Die eigentliche mathematische Erfindung steckt in der Umformung der Integrale durch partielle Integration. Diese so umgeformten Integrale werden dann ganz systematisch am Apparate konstruiert, zuerst dy, dann die Componenten cos ix dy, sin ix dy, wobei die Hauptaufgabe ist, die Azimute der Registrirrollen dem jeweiligen ix gleich zu machen.

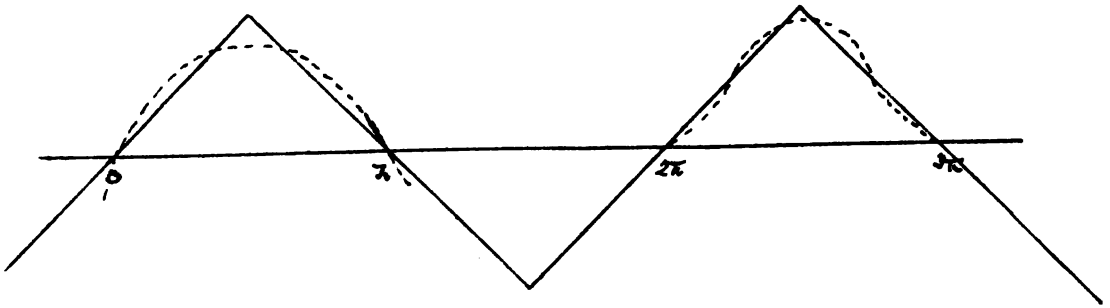
Hierauf lade ich Sie nun ein, den Apparat selbst zu besichtigen, der, wie alle Coradi'schen Apparate, ausgezeichnet schön gearbeitet ist. —

Zweitens gebe ich nunmehr im Anschluß an die vorläufigen Bemerkungen oben die Annäherung der beiden dort angeführten Curven durch abgebrochene Fourier'sche Reihen.

Es handelte sich erstens um die nachfolgend

gezeichnete Curve, deren Darstellung

$$y = 4/\pi \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{9} + \dots \right)$$ lautete



Als Annäherungscurven erhalten wir:

$$y_1 = 4/\pi \sin x$$

$$y_2 = 4/\pi \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{9} \right)$$

. . . . .

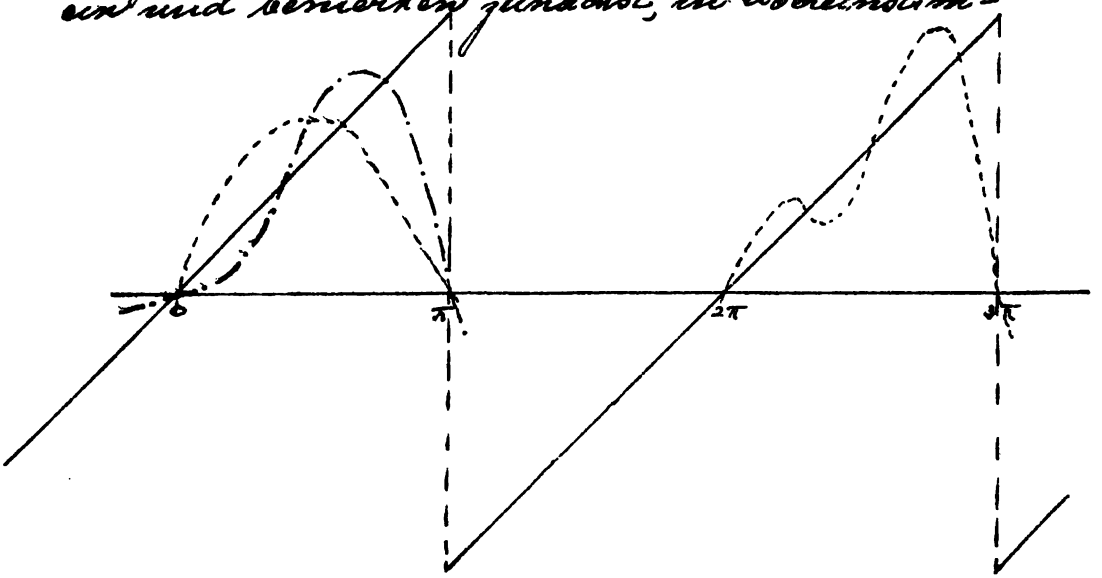
die in der Figur gezeichnet sind. Die Curve y_1 hat den Typus einer Sinuslinie, die die Curve in dem Intervall $0 \dots \pi/2$ einmal schneidet und sich nach Möglichkeit dem gezeichneten Polygon anschmiegt; die zweite Curve y_2 schneidet die Strecke zwischen 0 und $\pi/2$ zweimal und windet sich relativ zu der darzustellenden Curve schlangenartig zwischen 0 und π hin und her (y_n der Figur ist diese 2. Curve in das Intervall 2π bis 3π verlegt). Ich denke mir hier, wo wir die Sache rein inductiv behandeln, vielleicht folgendes:

Je mehr die Gliederzahl n wächst, um so mehr Schnitte zwischen Annäherungscurve und Originalcurve stellen sich ein und um so enger schmiegt sich nicht nur die Ordinate, sondern auch der Differentialquotient an die Ordinate und den Differentialquotienten der gegebenen Curve an. Mit dem Differentialquotienten wird es nur natürlich an den Knickstellen der Curve (bezw. deren Nähe); hier hat die Annäherungscurve allemal eine horizontale Tangente.

Die Verhältnisse werden ganz anders, wenn wir unser 2. Beispiel heranziehen. Hier war die Reihendarstellung durch

$$y = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots\right)$$ gegeben.

Wir zeichnen auch hier die Annäherungscurven ein und bemerken zunächst, ein Übereinstim-



mung mit dem Vorigen, dass auch hier die Zahl der Schnittpunkte der Original- und Annäherungscurve, je weiter wir gehen, immer größer wird. Die erste und zweite Annäherungscurve sind in das Intervall von 0 bis π, die dritte in das Intervall 2π bis 3π eingezeichnet.

Wie steht es aber mit der Annäherung der Ordinaten selbst?

Wir kommen hiermit zu einem feinen Punkt, der weiterverfolgt zur sogenannten „ungleichmäßigen Convergenz" der Fourier'schen Reihe in der Nähe der Sprungstellen der darzustellenden Funktion führt. Die Sache ist folgende:

An einem beliebigen Punkt, bei $\pi/2$ z. B., wird die Annäherung der Ordinate mit jeder folgenden Annäherungscurve besser. Wenn ich aber in die Nähe der Unstetigkeitsstelle gehe, so hat hier die Originalcurve nahezu die Ordinate π, die Annäherungscurve aber eine weitaus kleinere Ordinate, und principiell nicht besser wird es bei den folgenden Annäherungscurven. Wir haben hier das Missverhältniss, dass von der einzelnen Annäherungscurve die Ordinaten gar nicht approximiert werden, (sofern wir bei festgehaltenem

Index der Annäherungscurve nun nahe genug an die Unstetigkeitsstelle herangehen. Wenn ich dieses in Form einer allgemeinen Sentenz fassen darf, die natürlich an sich keine Beweiskraft hat, die Sache aber verständlich macht, so heißt es:

Für jeden bestimmten Wert $x = x_0$ können wir in der Gliederzahl der Reihe soweit gehen, daß die Ordinate der Näherungscurve mit der Ordinate der Originalcurve „befriedigend" übereinstimmt. Je näher aber das x_0 an der Unstetigkeitsstelle liegt, um so größer muß man das n nehmen, damit die gewollte befriedigende Übereinstimmung eintritt, und weiter, wenn mir Jemand die n^{te} Näherungscurve giebt, dann können wir mit dem x_0 so nahe an die Unstetigkeitsstelle herangehen, daß mit diesem gegebenen n noch keine befriedigende Übereinstimmung erzielt wird.

Was das Beispiel induktiv klärtert, faßt man theoretisch so:

Die unendliche Fourier'sche Reihe convergiert zwar für alle Werte x, aber die Convergenz erscheint bei Annäherung an die Unstetigkeitsstelle der Funktion unbeschränkt verlangsamt.

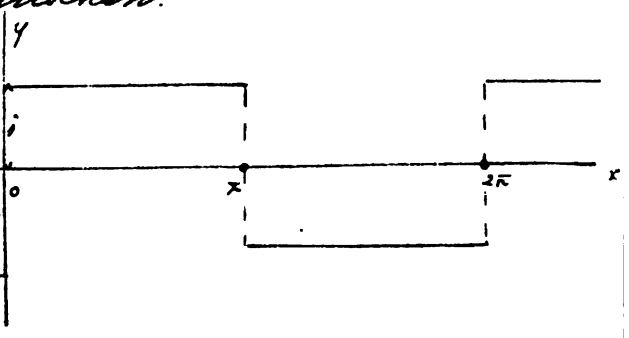
Man kann nun meinen, daß dann die Reihe an

der Unstetigkeitsstelle ganz schlecht resp. gar nicht convergiert. Es ist aber gerade das Gegenteil der Fall. Denn der Mittelwert $\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, um den es sich handelt, ist gleich Null und diesen Wert ergiebt bereits die erste Annäherungscurve. Man kommt zu der bezeichneten irrigen Meinung, weil man sich unwillkürlich den Grad der Convergenz gemäss elementarer Gewöhnung als stetige Funktion von x denkt, was er aber in Wirklichkeit eben nicht ist. Man nennt die hier auftretende Erscheinung der bei Annäherung an eine Stelle unbegrenzt verlangsamten Convergenz „die ungleichmässige Convergenz" der Reihe und diese klar gemacht zu haben, ist ein Hauptzweck der hier von mir gegebenen Erläuterungen. Zusammenfassend wiederhole ich so:

Die unendliche Fourier'sche Reihe convergiert für jedes x und insbesondere so gut wie möglich an der Unstetigkeitsstelle selbst, aber der Grad der Convergenz wird schlechter und schlechter, je mehr ich mich in die Nähe der Unstetigkeitsstelle begebe, und ich kann mich so nahe an die Unstetigkeitsstelle begeben, dass die Convergenz noch schlechter ist, als irgend ein vorgelegtes endliches Maass der Schlechtigkeit.

Was nun die Approximation der Richtung durch die Annäherungscurven betrifft, so habe ich bereits im Bezug auf unsere erste Curve gesagt, dass bei ihr die Richtung allerdings durch die successiven Näherungscurven approximiert wird (mit alleiniger Ausnahme der Scheitelpunkte). Dagegen wird, wie aus der Figur schon hervorgeht (cf. oben), im 2ten Beispiele zwar der Verlauf der Ordinaten, aber nicht der Verlauf der Curvenrichtung approximiert. Die Relativoscillationen zwischen Annäherungscurve und Originalcurve werden im Gegenteil bei wachsendem m immer steiler. Ein ähnliches Verhalten der Annäherungscurven tritt allemal ein, wenn es sich um eine Originalcurve mit Unstetigkeitsstellen handelt.

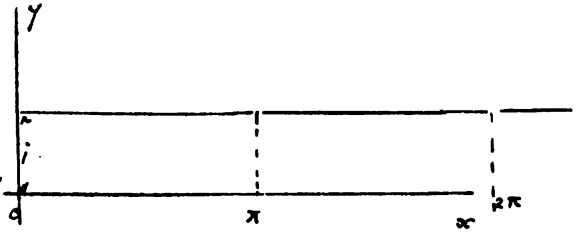
Den Grund hierfür können wir für unser Beispiel leicht folgendermaßen einsehen.



Bei unserer ersten Curve können wir leicht die Differentialcurve zeichnen; sie wird fortgesetzt aus Stücken mit den Ordinaten +i und -i bestehen, die in den Intervallen 0π, $\pi 2\pi$ ... abwechseln.

Im unserem 2ten Beispiel wird die Sache schwieriger,

Hier erhalten wir nämlich
im allgemeinen $y' = +i$, nur
an den Sprungstellen der Cur-
ve wird der Differentialquotient
unendlich gross.



Sehen wir uns nun diese Curven an, so finden wir,
dass in unserm ersten Falle die Differentialcurve selbst
wieder durch eine Fourier'sche Reihe

$$y' = 4/\pi \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right)$$

darstellbar ist, wobei an den Sprungstellen der Funktio-
on die Mittelwerte dargestellt werden. Und wie aus dem
Vergleich mit der Fourier'schen Reihe für die Original-
curve

$$y = 4/\pi \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right)$$

hervorgeht, kann diese geradezu durch gliedweise
Differentiation der letzteren erhalten werden. Dem-
nach ist ganz klar, dass unsere successiven Näherungs-
curven nicht nur die Ordinaten, sondern auch die
Richtung der Originalcurve approximieren (immer
mit Ausnahme der Sprungstellen).

Ganz anders ist die Sache bei unserm 2. Beispiel.
Hier ist erstens die Differentialcurve gar nicht durch
eine Fourier'sche Reihe darstellbar und zweitens, wol-
ten wir durch gliedweise Differentiation der Origi-

nahreihe

$$y = 2(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots)$$

die Reihe

$$y' = 2(\cos x - \cos 2x + \dots)$$

ableiten, so convergirt diese gar nicht, sodass wir uns schon darum nicht wundern können, wenn die Annäherungscurven den Differentialquotienten nicht approximieren. Und so wie in unserm Beispiel ist es immer, wenn man in Fourier'schen Reihen Funktionen darstellt, die Sprungstellen haben, und dann die Ableitungen dieser Funktionen in Betracht zieht.

Dies ist das Wenige, was ich in diesem Zusammenhange über die Fourier'schen Reihen sagen wollte. Zum Schlusse dieses ganzen Kapitels über Interpolation und Approximation von Funktionen einer Variablen will ich noch besonders auf die Arbeiten von P. L. Tschebycheff, des hervorragenden russischen Mathematikers, hinweisen.

Tschebydeff hat sein ganzes Leben hindurch immer wieder die Frage der annäherungsweisen Darstellung von Funktionen durch analytische Ausdrücke einfacher Bauart behandelt, er ist Approximationsmathematiker per excellence gewesen. Bis

lang waren seine Arbeiten sehr schwer zugänglich, da sie größtenteils in russischer Sprache verfaßt und in russischen Zeitschriften erschienen sind. Seit 1899 aber liegt der erste Band der gesammelten Werke in französischer Übersetzung, von Markoff und Sonin herausgegeben, vor. Dieser Band enthält die mannigfachsten Ansätze zur Interpolationslehre, und ich hebe hier besonders folgende 3 Abhandlungen hervor:

1) Sur les fractions continues, J. de math (2) 3 (1858) = Werke 1, p. 201 ff

2) Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro

3) Sur le développement des fonctions d'une variable, Petersburg, Bulletin de l'Acad. 1859 = Werke 1, p. 499 ff.

Von Übrigen will ich zur Charakterisierung der Tschebycheff'schen Arbeiten folgendes erwähnen:

Wir hatten bereits in unserer eigenen Darstellung der Approximation zwei Fragestellungen sich durchkreuzen sehen.

Das eine Mal gaben wir für eine Curve eine Anzahl von Ordinaten und verlangten einen einfachen Ausdruck, der an den gegebenen Stellen die-

selben Ordinaten hat. Das andere Mal brachten wir die Ideen der Methode der kleinsten Quadrate heran.

Man kann nun diese Ideen verbinden, indem man folgendermaßen verfährt:

Wir wollen eine Curve durch ein Polygon n^ten Grades darstellen

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n,$$

in dem $(n+1)$ Constante vorkommen. Sind uns nun nur $(n+1)$ Beobachtungen (Ordinaten) gegeben, so fallen wir natürlich auf die Lagrange'sche Interpolationsformel zurück. Haben wir aber mehr als $(n+1)$ Beobachtungen, so ist Gelegenheit, die Ideen der Methode der kleinsten Quadrate mit heranzubringen, indem man nämlich verlangt, daß die Summe der Fehlerquadrate bei der Legung der Parabel n^ter Ordnung ein Minimum wird. Diese Aufgabe ist noch einer Verallgemeinerung fähig, wenn die verschiedenen Beobachtungen ein verschiedenes Gewicht haben, sodaß man die Summe aus $(\text{Fehler})^2 \times (\text{Gewicht})$ zu einem Minimum zu machen sucht. Hierfür hat Tschebycheff zum abschließende Formeln mit Hülfe einer Kettenbruchentwickelung gegeben, sodaß ich vielleicht so kurz seine Leistung charakterisiere:

Eine erste Serie seiner Arbeiten bezieht sich darauf, dass mehr Beobachtungen gegeben sind, als unbekannte, zu benützende Coefficienten in der Interpolationsformel vorkommen, und dass man nun diese Coefficienten aus der Forderung bestimmt, die Summe der mit geeignetem Gewicht multiplicierten Fehlerquadrate soll ein Minimum werden.

Tschebyscheff war aber nicht im einseitigen Glauben an die Methode der kleinsten Quadrate befangen, sodass er in andern Arbeiten es erreicht, dass nicht die Summe der Fehlerquadrate, sondern der absolute Betrag des größten vorkommenden Fehlers zu einem Minimum gemacht wird. Dies geschieht in der wunderbaren Arbeit, die den Titel führt:

Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro.

Sie werden gleich sehen, wie das gemeint ist. Es sei ein Polynom n^{te} Grades mit dem höchsten Gliede x^n gegeben; die Aufgabe ist, die Coefficienten der andern Glieder so zu bestimmen, dass zwischen $+1$ und -1 möglichst geringe Abweichungen von Null vorkommen. Tschebyscheff bekommt auch

hier eine sehr einfache Schlussformel.

Und nun noch eine 3te Art von Untersuchungen.

Sie beziehen sich darauf, dass die sämtlichen Ordinaten einer Curve als gegeben angesehen werden, aber mit einem von der Abscissenaxe x abhängigen Gewichte, dass man nun Reihenentwickelungen sucht welche eine so gegebene Curve nach den Grundsätzen der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut approximieren, wobei sich ziemlich alle in praxi gebrauchten Reihen je nach der Art der Gewichtsverteilung auf die verschiedenen Beobachtungen ergeben. Als praktisches Beispiel hat Tschebycheff u.a. die Frage der Geradführung durch Kurbelgetriebe (das Gesetz des Kurbelgetriebes ist die darstellende Function) herangezogen. –

Ich habe diese Arbeiten von Tschebycheff über Interpolation hier ausführlich, erstens weil sie an sich sehr wertvoll sind und zweitens weil sie in Deutschland immer noch zu wenig bekannt sind. Auch das Referat über Interpolation von J. Bauschinger in dem eben erschienenen 6. Hefte des 1. Bandes der mathematischen Encyklopädie, dessen Lektüre ich übrigens Jedermann, der mit Interpola-

hier zu thun hat, lebhaft empfehlen will, enthält keine rechte Würdigung der Tschebyscheff'schen Arbeiten. Es erscheint erwünscht, dass einmal ein zusammengefasster Bericht dem deutschen mathematischen Publikum vorgelegt wird.

I 5. Punktionen zweier Veränderlichen

Ein kurzer Rückblick auf den bisherigen Aufbau der Vorlesung zeigt uns, dass wir sowohl bei der Behandlung der Variablen x, als auch den Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen stets den Gegensatz zwischen Approximations- und Präzisionsmathematik zu betonen hatten. An erstere schliessen sich dann die verschiedenen praktischen Verwendungen der Mathematik an. Dabei lag die Geometrie gewissermassen in der Mitte. Wir gebrauchen die Geometrie hier vorwiegend zur leichteren Erfassung abstrakterer Betrachtungen. Und da liegt die Sache folgendermassen: Soweit wir von Curven handeln, die wir zeichnen und uns konkret vorstellen, erläutern wir zunächst Beziehungen der Approximationsmathematik, andererseits aber ist die geometrische Vorstellung geeignet auf das Ideal hinzuweisen und dadurch indirekt seine Bedeutung verständlich zu machen, wie wir uns z. B.

die Weierstraß'sche Funktion klar machten, indem wir die successiven Näherungscurven in Betracht zogen.[1] –

Genauso stellt sich nun die Sache, wenn wir jetzt zu

Funktionen zweier Veränderlicher ($z = f(x,y)$)

übergehen. Wir beginnen auch hier mit Erläuterungen, die dem Gebiete der Präzisionsmathematik angehören, wobei mein Ziel ist, gewisse fundamentale Beziehungen durch Konstruktion geometrischer Figuren deutlicher zu machen, als durch die gewöhnliche abstrakte Darstellung geschieht.

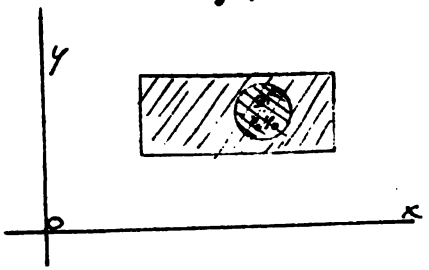
Zunächst etwas über den Bereich der Variablen x, y.

Mit den Fragen: was ist der allgemeinste Bereich x, y, wann ist er ein Continuum u.s.w.? Kämen wir tief in das Gebiet der Mengenlehre hinein. Ich gehe hierauf nicht ein, sondern verweise auf die schon citierten Referate von A. Pringsheim und A. Voss in der Encyklopädie, bezw. A. Schönflies in Bd. 8 der Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

---

1) Schließlich könnte man wohl alle Gebiete der Anwendungen in demselben Sinne benutzen, wie es hier mit der Geometrie geschieht; wir wollen uns hier in solche Spekulationen nicht zu sehr vertiefen.

Unser Bereich sei der Einfachheit halber ein Rechteck, dessen Seiten den Coordinatenaxen x, y parallel gewählt sind; für diesen Bereich sei unsere Funktion definiert.



Was damit begrifflich gemeint ist, ist wohl ohne nähere Erläuterung klar. Es soll zunächst nur festgesetzt sein, daß zu jedem Wertsystem (x, y) des Bereiches ein bestimmter Wert der f gehört.

Wann werde ich nun f(x, y) an einer Stelle $x_0 y_0$ stetig nennen?

Folgende Definition wird sofort Ihren Beifall haben:

Wir betrachten die Differenz

$$|f(x,y) - f(x_0 y_0)|$$

und nennen eine Funktion f(x,y) im Punkte $x_0 y_0$ stetig, wenn sich für ein noch so kleines gegebenes δ ein von Null verschiedenes ε derart finden läßt, daß für alle x, y, bei denen $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2$ ist, auch

$$|f(x,y) - f(x_0 y_0)| < \delta$$

wird. (Der Kreis mit dem Radius ε um $x_0 y_0$ ist von uns natürlich nur der Einfachheit hal-

ber gewählt. das Wesentliche ist, dass wir für noch so kleines δ um $x_0 y_0$ herum einen (endlichen) Bereich abgrenzen können, innerhalb dessen die Schwankung $|f(xy) - f(x_0 y_0)| < \delta$ bleibt).

Diese abstrakte Definition der Stetigkeit hat, wie Sie sehen, noch keine Schwierigkeit. Wir kommen aber schon auf compliciertere Verhältnisse, wenn wir ganz einfache analytische Ausdrücke betrachten.

Z.B. betrachten wir die rationale quadratische Funktion

$$f = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Dieselbe giebt uns bei der geometrischen Interpretation eine Linienfläche 4ten Grades, die in der Mechanik den Namen „Cylindroid" führt. Um ihren Verlauf zu discutieren, setzen wir $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Es kommt

$$f = \sin 2\varphi.$$

Die Fläche besteht demnach nach dem Gesetz $f = \sin 2\varphi$ aus lauter horizontalen Geraden (r fällt aus der Formel heraus), die die f-Axe schneiden. Die Frage ist: Welchen Werth hat die Ordinate f bei $x = 0$, $y = 0$?

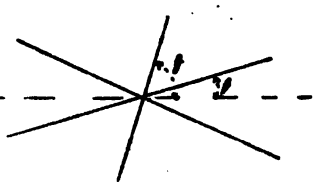
Das Modell (vgl. die Abbildung in Sir R. S. Ball:

Treatise of the theory of screws, Cambridge 1900) jetzt schon, daß hier gar kein bestimmter Wert festgelegt ist. Unser Ausdruck nähert sich für $x=0$, $y=0$ nur dann einem bestimmten Werte, wenn man angiebt, auf welchem Wege ich zum Punkte $x=0$, $y=0$ zuschreiten soll. Man bezeichnet diese Eigenschaft des Ausdrucks als eine Stetig-Veldeutigkeit, wie werden sagen:

Schon bei den rationalen Ausdrücken zweier Veränderlichen tritt diese Stetig-Vieldeutigkeit auf, welche doch durch unsere begriffliche Festlegung des Funktionsbegriffes zunächst ausgeschlossen ist.

Im Anschluß an diese erste Schwierigkeit, die bei den Funktionen zweier Variabler auftreten kann, will ich gleich noch eine zweite erläutern:

Es sei $f(x,y)$ für ein Wertsystem $x_0 y_0$ definiert; sie möge ferner stetig sein für jedes Argument ϑ, längs dessen wir auf den Punkt $x_0 y_0$ zuschreiten mögen.



Die Frage ist: Ist $f(x,y)$ dann für $x_0 y_0$ im Sinne unserer vorausgeschickten allgemeinen Definition stetig? ($f(x,y)$ stetig für $x_0 y_0$, wenn $|f(x,y) - f(x_0 y_0)| < \delta$

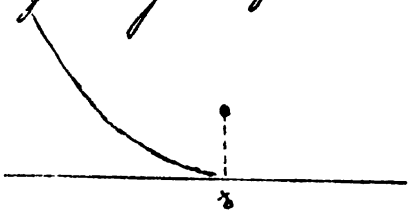
für $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$). Oder in Formeln geschrieben:

Kann man aus $|f(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ für $r < \delta_\theta$ (δ von θ abhängig) auf Stetigkeit schlechtweg schließen?

Es ergiebt sich, daß dies nicht der Fall zu sein braucht so daß eine Funktion, die für jede Fortschreitungsrichtung von $x_0 y_0$ aus stetig ist, noch nicht schlechtweg stetig zu sein braucht.

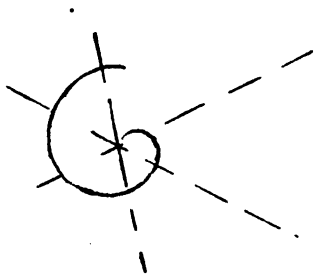
Um dies zu erläutern, komme ich zuerst auf das zurück, was wir bei der ungleichmäßigen Convergenz der Fourier'schen Reihe lernten. (Vgl. auch die früheren Erläuterungen über gleichmäßige Stetigkeit, pg 69)

Die ungleichmäßige Convergenz der Fourier'schen Reihe (d.h. die unendlich verlangsamte Convergenz) an einer Stelle x_0 können wir uns in einer Curve oder in einem gebrochenen Linienzug in der Weise versinnlichen, daß wir für jeden Wert von x den Quotienten $\frac{1}{n}$ (n = Gliederzahl für bestimmten Annäherungsgrad) als Ordinate auftragen. Es wird dann die Curve beständig nach der Stelle x_0



hin fallen, hier aber selbst einen von Null verschiedenen Wert annehmen (also unstetig durch Sprung sein). Trotzdem die Convergenz bei Annäherung an die Stelle x_0 unendlich verlangsamt wird, herrscht an allen Stellen Convergenz!

Ähnliches haben wir hier bei der <u>azimutalen Stetigkeit</u>.



Wir denken uns auf jeder Richtung ϑ ϱ_ϑ als Radius vektor aufgetragen, so dass wir eine Curve erhalten, die uns das Maass der „azimutalen" Stetigkeit giebt. Es ist nun möglich, dass bei dieser Curve allerdings für jedes ϑ ein endliches ϱ existiert, dass aber ϱ_ϑ trotzdem bei wechselndem ϑ jeden festen Wert ϱ_0 unterschreitet. Es ist dies dann der Fall, wenn sich die Curve bei Annäherung bestimmter Azimute beliebig nahe an den Punkt $r = 0$ heranzieht, um dann für die betreffenden Azimute selbst wieder in endliche Entfernung zu rücken. Ich fasse noch einmal zusammen:

Findet blos azimutale Stetigkeit statt, so ist nicht ausgeschlossen, dass ϱ_ϑ bei Annäherung an ein

zelne Werte von b der Null beliebig nahe kommt, wenn es nur für die betreffenden Werte b selbst wieder einen endlichen Betrag annimmt.

Für einen solchen Fall wird man nun ersichtlich um x_0 herum unmöglich einen Kreis mit einem festen Radius ϱ so beschreiben können, daß für alle Punkte im Innern des Kreises die Schwankung der Funktion unter δ bleibt.

Es ist also azimutale Stetigkeit noch nicht dasselbe wie Stetigkeit schlechtweg. Damit die azimutale Stetigkeit Stetigkeit schlechtweg wird, müssen wir ausdrücklich verlangen, daß es sich um gleichmäßige azimutale Stetigkeit handelt (d. h. eben, daß die Angabe eines endlichen ϱ möglich ist).

Hiermit dürfte dieser immerhin feine Punkt erledigt sein; ich bitte Sie, sich selbst Beispiele zu bilden, wo zwar azimutale Stetigkeit statthat, aber nicht Stetigkeit schlechtweg. —

Bei den schlechtweg stetigen Funktionen haben wir nun analog den Sätzen bei einer Funktion einer Variablen den Satz von der Existenz der Maxima und Minima und dem continuierlichen Durchlaufen aller Wertgebiete, wie Sie ebenfalls selbst überlegen wollen. —

Die nächstliegenden Fragen sind nun:

Wann ist eine stetige Funktion $f(x,y)$ differentiierbar, unbeschränkt differentiierbar und in eine Taylor'sche Reihe entwickelbar?

Hier haben wir zunächst von den ersten partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

einer Funktion zu reden.

Diese brauchen natürlich nicht zu existieren wir postulieren vielmehr ihre Existenz und fragen dann nach den höheren Differentialquotienten. Zunächst die 2. Differentialquotienten,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

Hier müssen wir sagen:

Soll eine stetige Funktion $f(x,y)$ an irgend einer Stelle nicht nur die ersten Differentialquotienten, sondern auch die zweiten und die folgenden höheren Differentialquotienten haben, dann muß man nicht nur deren Existenz ausdrücklich postulieren, sondern auch besonders untersuchen, ob die Differentiation unabhängig von der Reihenfolge ist d.h. ob z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ist.

Auf die letztere Frage gehe ich weiter unten ein.

Vorab nehmen wir die Existenz aller Differentialquotienten und auch die durchgängige Vertauschbarkeit der Differentiationen an und fragen:

Ist $f(x,y)$ dann in die Taylor'sche Reihe

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)p_0 + (y-y_0)q_0}{1!} + \frac{(x-x_0)^2 r_0 + 2(x-x_0)(y-y_0)s_0 + (y-y_0)^2 t_0}{2!} + \cdots$$

entwickelbar? ($r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.)

Wir müssen hier nach unseren früheren Bemerkungen die Antwort geben:

Damit die Taylor'sche Reihe gilt, genügt keineswegs die Existenz der Differentialquotienten und die Convergenz der formal aufgestellten Reihe, sondern es treten sozusagen Einschränkungen dazu, was darauf hinauskommt, daß das Restglied bei wachsendem n der Null beliebig nahe kommen soll. Nur wenn dies Alles zutrifft, nennen wir $f(x,y)$, zunächst im Convergenzbereich der Reihe, eine analytische Funktion der beiden Variablen x, y.

Und wir mögen hinzufügen: Solcherweise muß also eine große Anzahl von Voraussetzungen zusammenkommen, damit $f(x,y)$ eine analytische Funktion ist.

Wir werfen jetzt einen kurzen Blick auf die An-

wendungen und fragen: Wie steht es mit den in der Mechanik und Physik gebrauchten Funktionen von zwei oder mehreren Variablen?

Die übliche Ausdrucksweise in den Anwendungen ist die, daß man jede Funktion als analytisch ansieht und sich dann berechtigt glaubt, die Reihe bei den Gliedern erster, zweiter oder dritter Dimension abzubrechen, „weil dies eine genügende Annäherung giebt."

Demgegenüber hat unsere Kritik einzusetzen.

Ganz gewiss denkt man bei einer solchen Ausdrucksweise nicht an den gerade auseinandergesetzten exakten Begriff der analytischen Funktion. Man bewegt sich vielmehr von vornherein auf dem approximativen Gebiet und nimmt kurzweg an, daß die vorkommenden Abhängigkeiten mit hinreichender Annäherung durch Polynome erster, zweiter, dritter Dimension darstellbar seien. Es liegt also das Hauptgewicht bei der üblichen Ausdrucksweise auf dem Nachsatze: Die Annahme ist, daß die in den Anwendungen vorkommenden Funktionen mit genügender Annäherung durch Polynome ersten, 2., 3. Grades dargestellt werden können. Dass es sich, in Wirk

lichkeit" nun analytische Funktionen handele, ist für die kritische Auffassung, die ich hier vertrete, nicht zuzugeben; wir haben kein Mittel, es zu constatieren.

Die Frage ist nun: Kommen thatsächlich in den Anwendungen nur Abhängigkeiten vor, bei denen die genannte Approximation statthaft ist; ist in Sonderheit in der Praxis (bei Zugrundelegung der Bedeutung, welche die Differentialquotienten überhaupt für die Praxis haben) stets $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$? oder ist die ganze Annahme nur eine conventionelle, uns nur durch Gewöhnung geläufige?

Wir müssen hier sagen:

Es giebt in der Praxis Beispiele genug, bei denen es nicht gestattet ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ zu setzen.

Um dies klar zu machen, fragen wir vorab: Unter welchen Voraussetzungen beweist man innerhalb der Präzisionsmathematik, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ist? Nachher machen wir uns dann Beispiele, bei denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, indem wir unter den Flächen Umschau halten, die uns die Praxis vorführt.

Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ folgendermaßen definiert:

Zunächst ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k} = g(x,y)$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h=0} \frac{g(x+h, y) - g(x,y)}{h}$$

Kreuzigen wir beide Gleichungen, so kommt:

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h=0} \left(\lim_{k=0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) - f(x,y)}{hk} \right)$$

also:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ erwächst aus dem rechter Hand stehendem Bruche, wenn wir zuerst zur Grenze $k=0$ und dann erst zur Grenze $h=0$ übergehen.

Ähnlich haben wir:

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{k=0} \left(\lim_{h=0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)}{hk} \right),$$

sodaß wir uns den begrifflichen Unterschied in dem Satze klar machen:

Wir bekommen den anderen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, wenn wir die nämlichen beiden Grenzübergänge in der umgekehrten Reihenfolge machen, wenn wir zuerst $\lim_{k=0}$ und dann $\lim_{h=0}$ ausführen.

Es kommt also die Gleichheit der beiden Differentialquotienten auf die Frage hinaus, ob die beiden Grenzübergänge, die wir zu machen haben, vertauschbar sind oder nicht.

Wir werden jetzt mit Hülfe des Kollé'schen Satzes den gewöhnlichen Fall herausarbeiten, wo wirklich

$s = s'$ ist.

Es ist

$$p(x,y) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

. Nach dem Rolle'schen Satze gilt, unter der Voraussetzung, daß p existiert und in Bezug auf x stetig ist, die Beziehung.

$$f(x+h,y) - f(x,y) = h \cdot p(x+\vartheta h, y) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Jetzt nehmen wir p differentiierbar und den entstehenden Differentialquotienten s in Bezug auf y im Intervalle $y \ldots y+k$ stetig an, so können wir abermals den Rolle'schen Satz anwenden und haben:

$$p(x+\vartheta h, y+k) - p(x+\vartheta h, y) = k \cdot s(x+\vartheta h, y+\eta k) \quad (0 < \eta < 1)$$

oder zusammenfassend:

$$1)\ f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x,y) = h \cdot k \cdot s(x+\vartheta h, y+\eta k).$$

Ganz ebenso folgt unter entsprechenden Voraussetzungen:

$$f(x, y+k) - f(x,y) = k\, f(x, y+\eta' k)$$

$$q(x+h, y+\eta' k) - q(x, y+\eta' k) = h \cdot s'(x+\vartheta' h, y+\eta' k)$$

also

$$2)\ f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y) = hk \cdot s'(x+\vartheta' h, y+\eta' k)$$

Mithin aus 1) und 2)

$$s(x+\vartheta h, y+\eta k) = s'(x+\vartheta' h, y+\eta' k)$$

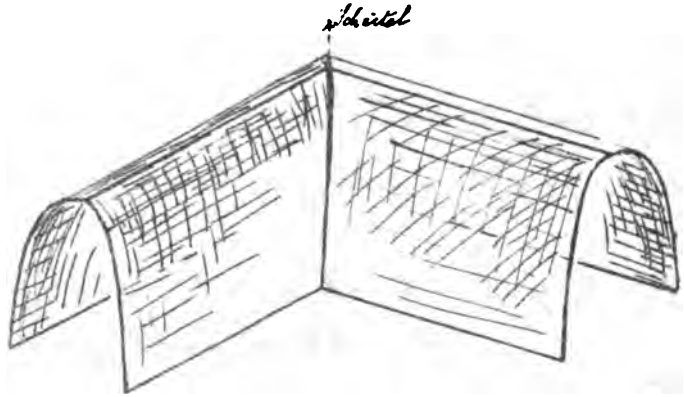
Nehmen wir nun an, daß s und s' für klei-

rer werdende k und h beide stetig in ihren Werth s(xy) resp s'(xy) übergehen, so folgt s = s', was wir beweisen wollten.

Es ergiebt sich also, daß wir zum Beweise der Gleichheit von $\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 k}{\partial y \partial x}$ nicht nur die Existenz, sondern auch die Stetigkeit von p, q, s und s' voraussetzen mußten. Soll also s von s' verschieden sein, während wir an der Existenz von s und s' festhalten, so müssen wir von den genannten Stetigkeitsvoraussetzungen etwas fallen lassen.

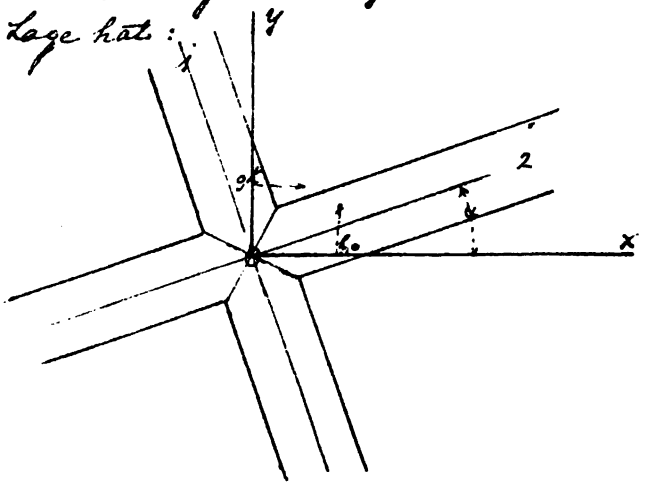
Wir wollen nun sehen, daß in der That bei den Flächen, die wir täglich beobachten[1], Beispiele auftreten, bei denen $s \neq s'$ ist.

Ich entnehme das Beispiel der Architektur.



1) oder genauer gesagt (da wir niemals scharfe Flächen beobachten): unter den idealen Flächen, deren Betrachtung uns durch die tägliche Beobachtung nahe gelegt wird.

Es mögen sich 2 halbkreisförmige Gewölbe kreuzen, sodass sie sich in einem „Kreuzgewölbe durchdringen. Wir wählen den Scheitel als Coordinatenanfangspunkt, die z-Axe vertical nach oben, und sollen nun für den Anfangspunkt die Worte s und s' berechnen. Damit wir ein brauchbares Resultat erhalten, das nicht durch die Symmetrie des Gewölbes verdeckt ist, denken wir uns das ganze Gewölbe unter einem Winkel $0 < \alpha < 45^\circ$ gegen das Coordinatensystem x, y orientiert, sodass die Projektion in der x,y Ebene folgende Lage hat:



Wir werden uns für jeden Punkt des Gewölbes p und q berechnen und als Limiten endlicher Differenzenquotienten erklären. Im Scheitel wird dabei jedenfalls $p=0$, $q=0$, da entlang der Mittellinie jedes Gewölbes die Tangentialebene übereinstimmt

Kimmond horizontal ist; also $p(0,0) = 0$, $q(0,0) = 0$.

Was ist nun $s(00)$ und $s'(00)$? Wir definieren sie als Limiten folgendermassen:

$$s = \lim_{k=0} \frac{p(0,k) - p(00)}{k}, \quad s' = \lim_{k=0} \frac{(q(h,0) - q(00)}{h}$$

Machen wir uns dies nun an der Figur klar, indem wir h und k der Bequemlichkeit halber positiv wählen, so liegt $0,k$ im Gewölbe i, p misst das Ansteigen oder Fallen des Gewölbes i in der Richtung x. Es ist also $p(0,k)$ negativ. Dagegen $h,0$ liegt im Gewölbe 2, q misst das Ansteigen oder Fallen dieses Gewölbes in der Richtung y. Es ist also $q(h,0)$ positiv. Aus dieser qualitativen Überlegung folgt also:

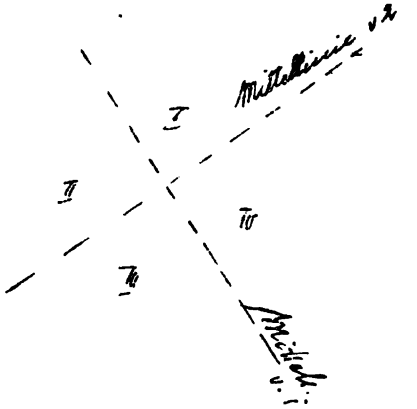
s entsteht durch Grenzübergang aus einem negativen Differenzenquotienten, s' entsteht durch Grenzübergang aus einem positiven Differenzenquotienten. Wenn also s und s' nicht beide gerade Null werden, kann s nicht gleich s' sein.

Wir führen nun Formeln ein, um den Grenzübergang rechnerisch zu verfolgen.

In der ursprünglichen Lage (in der die Mittellinie der Gewölbe den Axen x, y parallel sind) haben wir die Formeln:

$$y = c_0 - c_1 y^2 + \dots \quad \text{für Gewölbe 2}$$

$z = C_0 - C_1 x^2 + \ldots\ldots$ für Gewölbe I;
die linearen Glieder fallen wegen $p(\infty) = 0$, $q(\infty) = 0$ fort, die Glieder dritter Ordnung und höherer sind der Einfachheit halber weggelassen, weil sie für das abzuleitende Resultat doch ohne Einfluß sein würden.



Drehen wir jetzt das ganze System um den Winkel α und bezeichnen (wie die Figur andeutet) die verschiedenen Partieen des ganzen Gewölbes mit I ... IV, so haben wir für

I und III $\quad z = C_0 - C_1 (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 + \ldots$

II — IV $\quad z = C_0 - C_1 (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + \ldots$

zu setzen. Und damit für

I und III
$$p = -2C_1 \sin^2\alpha\, x + 2C_1 \sin\alpha \cos\alpha\, y + \ldots$$
$$q = +2C_1 \sin\alpha \cos\alpha\, x - 2C_1 \cos^2\alpha\, y + \ldots$$

II und IV aber
$$p = -2C_1 \cos^2\alpha\, x - 2C_1 \sin\alpha \cos\alpha\, y + \ldots$$
$$q = -2C_1 \sin\cos\alpha\, x - 2C_1 \sin^2\alpha\, y + \ldots$$

Im Scheitelpunkte des Kreuzgewölbes sind nach diesen Formeln in der That $p = 0$, $q = 0$ für beide Korridorgewölbe. Im Übrigen aber findet längs

den Durchdringungscurven der Gewölbe eine Unstetigkeit in den Werten von p und q statt; die beiden Wölbungen stoßen mit einem Knick aneinander.

Wir berechnen nun s für den Anfangspunkt. Es kommt aus $\varphi(0, t)$ in II, indem wir die höheren Glieder der Reihenentwickelung weglassen:

$$s = \left\{ \frac{-2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot k}{k} \right\}_{k=0} = -2C_1 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Wir haben damit einen von k unabhängigen Wert, der für $\lim_{k=0}$ als negativ bestehen bleibt.

Als Differenzenquotient zur Berechnung von s' ergibt sich dagegen bei Weglassung der höheren Glieder:

$$s' = + \left\{ \frac{2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot h}{h} \right\}_{h=0}, \text{ was wieder}$$

seinen Wert beim Grenzübergang nicht ändert, da h herausfällt. Es folgt also:

$$s' = + 2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Somit ist im allgemeinen $s \neq s'$ und nur dann kommt $s = s'$, wenn $\alpha = 0°$ oder $= 90°$ ist. –

Dies Beispiel hat, wie Sie sehen, nichts abstraktes und schwieriges, sondern etwas ganz alltägliches. Wir können es z. B. in der Weise auf das Dach eines Regenschirmes verallgemeinern, daß, sobald der Schirm zwar aufrecht, aber nicht nach

rechts und links symmetrisch gehalten wird, dann allemal der hier besprochene Fall $s \neq s'$ uns zu Häupten in der Spitze eintritt. Wir können hier daher vielleicht so abschließen:

Solche Flächenformen, bei denen s von s' eine Linie des hier erläuterten Beispiels verschieden sind sind im Grunde alltäglich, und es ist nur Folge unserer scholastischen Erziehung, daß wir nicht daran denken (scholastisch in dem Sinne, daß man kritiklos die Ansätze acceptiert, die man in den Büchern findet). —

Soviel über die Funktionen zweier Veränderlicher von präcisionsmathematischer Seite. Ich gehe jetzt dazu über noch etwas über sie von seiten der Approximationsmathematik zu bemerken, ähnlich wie oben auf die präcisionsmathematische Behandlung der Funktionen $f(x)$ ein Kapitel über Interpolation zum Annäherung folgte:

Wie wird man nun eine Funktion $f(x,y)$ approximieren?

Das Nächstliegende ist durch homogene Polynome steigender Ordnung in x, y:

$$z = f_0 + f_1 + f_2 + \dots ,$$

die in der Mechanik und Physik, wie wir er-

wähnten, vielfach benutzt werden.

Das andere wäre, daß man den trigonometrischen Reihen entsprechend die Funktion durch die Kugelfunktionen zu approximieren sucht (zuerst bei Laplace).

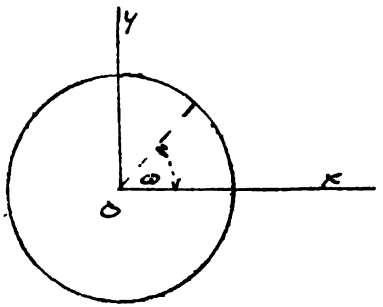
Indem ich den ersten Punkt hier übergehe, gedenke ich etwas über die Kugelfunktionen mitzuteilen, soviel, daß ihr Wesen und ihre darstellende Kraft verständlich wird.

Es soll sich hier also um eine Verallgemeinerung der trigonometrischen Reihen handeln. Zu dem Zweck müssen wir die Reihe für $f(\omega)$

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega + b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega$$

formal etwas anders einführen, als wir es seither thaten.

1) Wir denken uns eine um 2π periodische Funktion $f(\omega)$ mit ihren Werten entlang einer Kreisperipherie, wo ω der Centriwinkel ist, aufgetragen; der Radius mag 1 sein.



2) Diese Funktion $f(\omega)$ wird nun durch Paare einzelner Terme $a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$ approxi-

miert, deren Gesetz wir etwas anders durch Einführung rechtwinkeliger Coordinaten ausdrücken.

Es ist $\cos\omega = x$, $\sin\omega = y$, also

$\cos\omega + i\sin\omega = x + iy$ und nach Moivre

$\cos n\omega + i\sin n\omega = (x+iy)^n$ $\cos n\omega - i\sin n\omega = (x-iy)^n$.

Es lassen sich hiernach (in sehr bekannter Weise

1/ $\cos n\omega$ und $\sin n\omega$ als homogene Polynome n^{te}. Grades in x, y ausdrücken. Dasselbe gilt für $a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$. Aber diese Polynome genügen der einfachen Differentialgleichung:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,$$ weil ihr $(x+iy)^n$ und $(x-iy)^n$ genügen. Und nun ist das Wichtige, daß diese Differentialgleichung charakteristisch ist. Das ist so gemeint:

2/ Wenn ich ein homogenes Polynom n^{ten} Grades suche, das der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ genügen soll, dann komme ich von selbst dabei auf eine Verbindung $a\cos n\omega + b\sin n\omega$.

Es folgt dies durch eine einfache Abzählung: Ein homogenes Polynom Φ n^{ten} Grades hat $(n+1)$ Coefficienten. Zu dem zugehörigen $\Delta\Phi$ hat man ein homogenes Polynom $(n-2)^{ten}$ Grades mit $(n-1)$ Coefficienten, das identisch Null sein soll. Damit sind

die $(n+1)$ Coefficienten $(n-1)$ Bedingungen unterworfen; 2 Coefficienten bleiben noch willkürlich (also a und b in unserm Ausdruck).

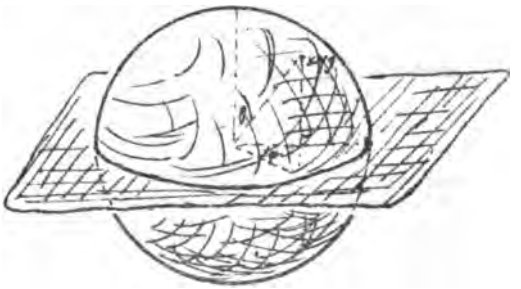
Bezeichnen wir die genannten Polynome n^{ten} Grades mit $P_0, P_1, \ldots P_n$ -, so haben wir das Resultat:

Man kann die gewöhnliche trigonometrische Reihe für $f(\omega)$ bezeichnen als eine Reihenentwicklung, die nach homogenen Polynomen steigenden Grades von x, y fortschreitet, wobei jedes Polynom der charakteristischen Gleichung $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ genügt. Hernach setzt man $x = \cos\omega$, $y = \sin\omega$.

Dabei ist noch gar nicht die Rede davon, ob wir uns mit einer unendlichen oder endlichen Reihe beschäftigen, sondern es ist nur das rein formale Gesetz der Aufeinanderfolge der Terme gemeint. Weiterhin besteht die Kunst natürlich in der zweckmäßigen Berechnung der zunächst noch willkürlichen Constanten a_n, b_n.

Indem ich die gewöhnlichen trigonometrischen Reihen so schildere, werden sie verallgemeinerungsfähig für höhere Dimensionen. Wir gehen nur um eine Dimension in die Höhe:

Wir denken uns eine Kugel vom Radius 1 und



auf ihr einen Punkt durch die Coordinaten xyz gegeben. Führen wir sodann Polarcoordinaten φ, ϑ ein, wo φ die geographische Länge, von 0 bis 2π und ϑ der Abstand vom Nordpunkte, von 0 bis π variiert, so haben wir folgende Formeln:

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = \sin\vartheta\cdot\sin\varphi\,, \quad z = \cos\vartheta\,.$$

Es sei uns nun eine Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ auf der Kugel gegeben. Wir wollen sehen, ob wir dieselbe durch eine analoge Reihe von homogenen Polynomen n^{ten} Grades in xyz darstellen können, welche dieselbe der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

genügen. Also

$$f(\vartheta, \varphi) = P_0 + P_1 + \ldots + P_n + \ldots .$$

Ob die Reihe für $n = \infty$ convergiert und ob die endliche Reihe unsere Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ in convenabler zweckmäßig approximiert, ist eine Sache für sich, von der wir vorläufig gar nicht sprechen. Hier handelt es sich nur darum, das rein formale Gesetz anzugeben, welches sich als eine naturgemäße Verallgemeinerung des früheren ansehen läßt.

Ein einzelnes solches Polynom F nennen wir nun eine Kugelfunktion, so daß wir als Definition erhalten:

Unter einer Kugelfunktion verstehen wir zunächst ein homogenes Polynom n^{ten} Grades in xyz, welches der Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügt.

Später werden wir unter einer Kugelfunktion n^{ten} Grades im Engeren denjenigen Ausdruck verstehen, der dadurch hervorkommt, daß wir für xyz ihre Ausdrücke in ρ, ϑ einsetzen. —

Überlegen wir uns, wieviel Constante in F_n noch unbestimmt bleiben:

Ein beliebiges $F_n(xyz)$ hat $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Constante (folgt durch vollständige Induktion aus F_1 mit 3 und F_2 mit 6 Constanten). Bildet man ΔF, so erhält man ein Polynom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades mit $\frac{(n-1)n}{2}$ Constanten. Soll dieses identisch verschwinden, so werden den Coefficienten $\frac{(n-1)n}{2}$ Bedingungen auferlegt, es bleiben also noch

$$\frac{(n+1)(n+2) - (n-1)n}{2} = \frac{4n+2}{2} = 2n+1$$

Constante willkürlich, so daß wir den Satz haben:

Die allgemeinste Kugelfunktion n^{ten} Grades enthält noch $2n+1$ unbestimmte Parameter, und zwar treten diese Parameter in F linear auf, weil sich aus $\Delta F = 0$ nur lineare Bedingungsglei-

chungen für die Coefficienten von F ergeben.

Wir verificieren dies für $n=2$.

Das allgemeinste Polynom 2. Grades lautet

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

Bildet man $\Delta F_2 = 0$, so kommt

$$2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0$$

Es sind also die 6 Coefficienten einer linearen Bedingung unterworfen, sodass noch 5 Coefficienten willkürlich bleiben, wie es sein muss. –

Wir wollen nun für die 4 niedrigsten Fälle die Polynome wirklich angeben. Man macht das in üblicher Weise so, dass man an die Polardarstellung anknüpft und in einer speciellen Tafel für $n=0, 1, 2 \ldots 4$ je $2n+1$ specielle Kugelfunktionen giebt, aus denen sich dann die allgemeine Kugelfunktion des betreffenden Grades mit beliebigen constanten Multiplikatoren additiv zusammensetzt. Ich bemerke, dass man die erste horizontale Reihe sich berechnen muss[1], die andern ergeben sich ein-

---

[1] Die Verification ist natürlich sehr einfach. Man setze z. B. statt

$$5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$$

unter Rückgang zu rechtwinkligen Coordinaten

$$5\frac{z^3}{r^3} - 3\frac{z}{r} \quad (x^2+y^2+z^2)$$

und überzeuge sich, dass Δ verschwindet!

fach, wenn man die Differentialquotienten dieser ersten Glieder nach $\cos\theta$ (unter Weglassung gewisser Zahlencoefficienten) mit den angegebenen Faktoren multipliziert (Siehe die Tafel auf der folgenden Seite!).

Die allgemeinste Kugelfunktion P_4 setzt sich also aus den 9 hingeschriebenen speziellen linear mit beliebigen Coefficienten zusammen.

Wir wollen nun, um eine bestimmte Aufgabe vor uns zu haben, eine gegebene Funktion $f(\theta,\varphi)$ durch die 4 ersten Kugelfunktionen in der Weise approximieren, dass der Rest möglichst klein wird.

Wir setzen also

$$f(\theta,\varphi) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \text{Rest},$$

wo uns nun insgesamt 25 Constante unbekannt sind. Zur Berechnung ziehen wir unsere bereits früher ausgesprochene Idee heran, die Summe der Fehlerquadrate, d.h.

$$(f - P_0 + P_1 \ldots - P_4)^2 \times \text{Oberflächenelement dO der Kugel}$$

integriert über die Kugel, zu einem Minimum zu machen.

Ich resumiere die Sachlage folgendermaßen:

Indem wir hier von der unendlichen Reihe absehen, die in den Büchern meist ausschließlich be-

Kugelfunktionen der 4 ersten Grade

Y_0	1			
Y_1	$\cos\theta$	$\left.\begin{matrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi\end{matrix}\right\}$ 1		
Y_2	$3\cos^2\theta - 1$	$\left.\begin{matrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi\end{matrix}\right\}$ $\cos\theta$	$\left.\begin{matrix}\sin^2\theta\cos 2\varphi \\ \sin^2\theta\sin 2\varphi\end{matrix}\right\}$ 1	
Y_3	$5\cos^3\theta - 3\cos\theta$	$\left.\begin{matrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi\end{matrix}\right\}$ $(5\cos^2\theta - 1)$	$\left.\begin{matrix}\sin^2\theta\cos 2\varphi \\ \sin^2\theta\sin 2\varphi\end{matrix}\right\}$ $\cos\theta$	$\left.\begin{matrix}\sin^3\theta\cos 3\varphi \\ \sin^3\theta\sin 3\varphi\end{matrix}\right\}$ 1
Y_4	$35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3$	$\left.\begin{matrix}\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi\end{matrix}\right\}$ $(7\cos^2\theta - 3\cos\theta)$	$\left.\begin{matrix}\sin^2\theta\cos 2\varphi \\ \sin^2\theta\sin 2\varphi\end{matrix}\right\}$ $(7\cos^2\theta - 1)$	
Y_4	(Fortsetzung der vorausgehenden Zeile)	$\left.\begin{matrix}\sin^3\theta\cos 3\varphi \\ \sin^3\theta\sin 3\varphi\end{matrix}\right\}$ $\cos\theta$	$\left.\begin{matrix}\sin^4\theta\cos 4\varphi \\ \sin^4\theta\sin 4\varphi\end{matrix}\right\}$ 1	

handelt wird, die uns hier aber nicht interessiert, da wir von der praktischen Approximation durch eine endliche Reihe handeln wollen, so wird die Aufgabe die sein, die 25 unbekannten Coeffizienten in den Ausdrücken $F_0, F_1 \dots F_4$ so zu berechnen, daß die Summe der Fehlerquadrate in Bezug auf die Kugel ein Minimum wird.

Das sieht nun so aus, als ob wir 25 lineare Gleichungen allgemeinster Bauart mit 25 Unbekannten auflösen sollten, was natürlich sehr schlimm wäre. Das ist aber nicht der Fall, da die einzelnen Gleichungen nach Ansatz der Rechnung nach je einer Unbekannten bereits aufgelöst sind, wie wir sofort sehen werden.

Um dies bequem durchzuführen, gebrauchen wir Summenzeichen und schreiben für die Kugelfunktionen in der ersten horizontalen Reihe der Tabelle in üblicher Weise $P_n(\cos\theta)$. Dann haben wir für die übrigen

$$\left.\begin{matrix}\sin\theta^\nu \cos\nu\varphi \\ \sin\theta^\nu \sin\nu\varphi\end{matrix}\right\} P_n^\nu(\cos\theta),$$

wo der Index ν in P_n die νfache Differentiation nach $\cos\theta$ (unter Wegwerfung sich abtrennender Zahlencoeffizienten) andeutet. So wird die ganze Reihe

$$f(\theta,\varphi) = \sum_0^4 n \sum_0^{n-1} \nu \left\{ (a_{n,\nu} \sin\theta^\nu \cos\nu\varphi + b_{n,\nu} \sin\theta^\nu \sin\nu\varphi) P_n^\nu(\cos\theta) \right\},$$

was ich zur Abkürzung mit

$$\Sigma\Sigma\,(a_{n,\nu}\Phi_{n,\nu} + b_{n,\nu}\Psi_{n,\nu})$$

bezeichne.

Wenn man nun zunächst die Summe der Fehlerquadrate aufsucht:

$$\int (f(\vartheta,\varphi) - \Sigma\Sigma\, a_{n,\nu}\Phi_{n,\nu} - b_{n,\nu}\Psi_{n,\nu})^2\, d\omega,$$

so ergiebt sich, daß sich der Inbegriff der in den a,b quadratischen Glieder wegen der sog. Integraleigenschaft der Kugelfunktionen außerordentlich vereinfacht.

Bezeichnen nämlich Φ' und Φ'' 2 verschiedene von unsern speziellen 25 Kugelfunktionen, dann wird $\int \Phi'\Phi''\, d\omega = 0$, oder im Besonderen

$$\int \Phi\Phi'\, d\omega = 0\,, \quad \int \Phi'\Psi''\, d\omega = \int \Phi''\Psi'\, d\omega = 0\,, \quad \int \Psi'\Psi''\, d\omega = 0\,.$$

(Vergl. das analoge Verhalten der Integrale ($i \neq k$)

$$\int \cos ix \cdot \cos kx\, dx\,, \quad \int \sin ix \cos kx\, dx\,, \quad \int \sin ix \sin kx\, dx$$

bei den trigonometrischen Reihen [auch $i = k$])

Dadurch wird die Funktion, nämlich die Summe der Fehlerquadrate, die durch geschickte Annahme der Coefficienten a,b zu einem Minimum gemacht werden soll, sehr viel einfacher, als man eigentlich annehmen könnte. Sie heißt

$$\int f^2\, d\omega - 2\Sigma \int f\cdot\Phi\, d\omega + \Sigma \int \Phi^2\, d\omega,$$

wo die Summen über alle spezielle Kugelfunktionen, die oben angegeben sind, zu nehmen. In Φ und Ψ ausge-

drückt, lautet die Funktion

$$\Delta = \int f^2 d\omega - 2\sum\sum \{ a_{m,\nu} \int (f \Phi_{m,\nu}) d\omega + b_{m,\nu} \int (f \Psi_{m,\nu}) d\omega \}$$
$$+ \sum\sum \{ a_{m,\nu}^2 \int \Phi_{m,\nu}^2 d\omega + b_{m,\nu}^2 \int \Psi_{m,\nu}^2 d\omega \}.$$

Um sie zu einem Minimum zu machen, setzen wir die Differentialquotienten nach $a_{m,\nu}$ und $b_{m,\nu}$ gleich Null. Wir erhalten

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{m,\nu}} = 0 = -\int f \Phi_{m,\nu} d\omega + a_{m,\nu} \int \Phi_{m,\nu}^2 d\omega$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial b_{m,\nu}} = 0 = -\int f \Psi_{m,\nu} d\omega + b_{m,\nu} \int \Psi_{m,\nu}^2 d\omega.$$

Wie man sieht, enthält jede einzelne dieser 25 Gleichungen nur eine Unbekannte, wir bekommen ohne weiteres:

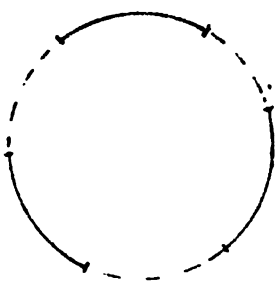
$$a_{m,\nu} = \frac{\int f \Phi_{m,\nu} d\omega}{\int \Phi_{m,\nu}^2 d\omega}, \qquad b_{m,\nu} = \frac{\int f \Psi_{m,\nu} d\omega}{\int \Psi_{m,\nu}^2 d\omega}.$$

Damit ist das Problem gelöst, worauf wir noch folgende allgemeine Bemerkung zufügen:

Das Schöne bei dieser Bestimmungsweise ist, daß (gerade wie bei der Fourier'schen Reihe) der Wert der einzelnen $a_{m,\nu}$ resp. $b_{m,\nu}$, wie er sich aus dem Wahrscheinlichkeitsansatz ergiebt, gar nicht davon abhängt, welche andere Indicespaare m,ν man bei der Approximation von f daneben benutzen will, so daß ein Coefficient $a_{m,\nu}$, der einmal berechnet ist, bestehen bleibt, auch wenn man später die

Reihenentwicklung beliebig ausdehnen will. Haben wir also für eine Annäherung durch Kugelfunktionen bis zur 4ten Ordnung die 25 Coefficienten berechnet, so werden diese, falls wir zu Kugelfunktionen 5ter Ordnung gehen, durch die hinzutretenden 11 Coefficienten nicht alterirt.

Alles dies betraf den rein formalen Ansatz der Reihe. Wollen wir jetzt einen Einblick in das Wesen der zunächst nur formal definirten Kugelfunktionen thun, so gehen wir dabei wieder von der Fourier'schen Reihe aus.



Die Fourier'sche Reihe baut sich aus Termen $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ auf; wie diese auf der Kreisperipherie verlaufen, insbesondere wo die Nullstellen liegen, ist ohne weiteres ersichtlich. Die Zahl der Nullstellen ist $2n$ und wächst also mit wachsendem n. Gleichzeitig sind dieselben gleichförmig über die Kreisperipherie verteilt.

Ähnliches ist es nun zunächst bei den Funktionen $P_n(\cos\vartheta)$ d.h. $P_n(\gamma)$.

Wir denken uns eine Kugel und fragen nach den Nullstellen der Funktion $P_n(\gamma)$. Ich behaupte,

ohne hier den Beweis zu geben, da es sich nur um eine erste Übersicht über die Kugelfunktionen handeln soll:

$P_n(\cos\vartheta) = 0$ hat n reelle Wurzeln zwischen $+1$ und -1, die gegen 0 symmetrisch liegen, d.h. es gibt n reelle Parallelkreise auf der Kugel, welche zum Aequator symmetrisch liegen, auf denen $P_n(\varphi) = 0$. Es braucht also eine solche Kugelfunktion $P_n(\varphi)$ die Kugel in $(n+1)$ Zonen, in denen sie abwechselnd positiv und negativ ist. Danach nennt man sie nach dem Vorgange der Engländer <u>zonale Kugelfunktion</u>!

Neben die Kugelfunktion $P_n(\cos\vartheta)$ hatten wir eine Reihe anderer gestellt, die die Faktoren $\begin{matrix}\cos \nu\varphi \\ \sin \nu\varphi\end{matrix} \Big\} \sin^\nu\vartheta$ hatten. Nehmen wir vorab gleich den höchsten Fall $\nu = n$, so wird $P_n^n(\cos\vartheta) = i$ und wir haben es mit den einfachen Kugelfunktionen:

$$\begin{matrix}\cos n\varphi \cdot \sin^n\vartheta \\ \sin n\varphi \sin^n\vartheta\end{matrix} \Big\} i$$

zu thun. Fragen wir hier nach den Nullstellen, so kommt es wesentlich auf die ersten Faktoren an (die ϑ geben uns die Pole der Kugel).

Wir erhalten:

Die Kugelfunktionen $\left.\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}\right\} \sin^n\theta$ zerlegen die Kugel in $2n$ von Meridianen begrenzte gleichwinkelige Sektoren, für welche die Kugelfunktionen abwechselnd positiv und negativ sind. Sie erhalten deshalb den Namen: „sektorielle Kugelfunktionen."

Nun zu den Zwischenfällen:

$$\left.\begin{matrix}\cos r\varphi \ \sin^r\theta \\ \sin r\varphi \ \sin^r\theta\end{matrix}\right\} P_n^r(\cos\theta)$$

Der erste Faktor zerlegt die Kugel durch r aequidistante Meridianebenen, der zweite (wie nicht schwer zu sehen ist) durch $n-r$ Parallelkreise, sodaß damit die Kugelfläche in einzelne Vierecke zerlegt ist, weshalb man diese Kugelfunktionen als „tesserale Kugelfunktionen" bezeichnet. Damit haben wir den 3ten Satz:

Die sogenannten tesseralen Kugelfunktionen ($r > 0$, aber $< n$) ergeben, gleich Null gesetzt, r Meridiankreise, die sich in Nord- und Südpol un-

ter gleichen Winkeln kreuzen, und n–1 Parallelkreise, die zum Aequator symmetrisch liegen.

Somit wird man also, wie man $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ entlang der Kreisperipherie als oscillierende Funktionen bezeichnen kann, auch unseren Kugelfunktionen in Bezug auf die Kugel dieselbe Benennung beilegen, indem man dabei ganz genau vor Augen sieht, wie die Gebiete mit positiven und negativen Funktionen abwechseln. Es ist natürlich äusserst interessant, dies bis ins numerische Detail zu untersuchen, insbesondere zu sehen, wie die positiven und negativen Gebiete der verschiedenen Kugelfunktionen übereinander greifen.

Aus solchen oscillierenden Funktionen baut sich also die Reihe auf, die wir untersuchen. Es fragt sich nun, wie genau die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ approximiert wird, resp. ob wir den Fehler abschätzen können.

Darüber berichte ich nur:

Der Fehler d.h. die Differenz zwischen der darzustellenden Funktion und der endlichen Summe läßt sich an jeder Stelle in geschlossener Form durch ein über die Kugel erstrecktes Integral angeben, wieder genau entsprechend dem, was bei der Fou-

rier'schen Reihe bekannt ist.

Die betreffende Abschätzung findet sich in den Lehrbüchern, nur dass dort einseitig das Gewicht darauf gelegt wird zu zeigen, dass bei unendlich wachsendem n, im Falle f(x) eine „vernünftige" Funktion ist, dieser Rest gegen Null convergiert während es in der Praxis darauf ankommt den Rest für endliches n numerisch abzuschätzen.

Dieser ersten Bemerkung über das Restglied füge ich eine zweite hinzu:

Bei der Fourier'schen Reihe zeichneten wir für einfache Beispiele von Funktionen f(x) die verschiedenen Annäherungscurven entsprechend n = 1, 2 ... und machten im Anschluß an die Zeichnungen interessante Beobachtungen (über ungleichmäßige Convergenz u.s.w.).

Für Kugelfunktionen haben wir derartige Zeichnungen resp. Modelle leider nicht in unserer Sammlung. Ich stelle also ausdrücklich die Aufgabe, für irgendwelche einfache Funktionen auf der Kugelfläche die Annäherungsflächen zu modellieren und zu studieren. Als einfaches Beispiel schlage ich vor, die in den 8 aufeinanderfolgenden Oktanten des Coordinatensy-

Hems abwechselnd die Werte +1 und -1 darbietende Funktion durch Kugelfunktionen bis zur 4ten Ordnung zu approximieren.[1]

Als letzte Bemerkung füge ich etwas über die Approximation empirischer Funktionen hinzu. Wieweit man da mit dem n zu gehen hat d.h. wieviel Glieder der Kugelfunktionenentwickelung man gegebenenfalls gebraucht, um die für jeden praktischen Fall ausreichende Genauigkeit zu bekommen, dem wird in keiner Weise durch unsere theoretische Entwickelung präjudiciert und kann nur jeweils von dem Fachmann entschieden werden.

Als berühmtes Exemplum führe ich die Arbeit von Gauß aus dem Jahre 1839 an:

Über die allgemeine Theorie des Erdmagnetismus (Resultate des magnetischen Vereins vom Jahre 1839 = Werke, Bd. 5), in der das Potential der erdmagnetischen Kraft, wo also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$ die Kraftcomponenten geben, von ihm nach Kugelfunktionen bis zur 4ten Ordnung numerisch berechnet wurden (wobei es sich um 24 Coeffi-

---

[1] Vergl. Protocollbuch des Seminars vom Sommer 1894; Vortrag von Giro Fano.

gienten handelt, insofern eine additive Constante beim Potential nicht in Betracht kommt).

Diese Rechnungen sind seit 1839 verschiedentlich mit besserem Beobachtungsmaterial wiederholt, besonders von Neumayer in Hamburg*). Es zeigt sich hierbei, daß die Annäherung mit Kugelfunktionen bis zur 4ten Ordnung ein Gesamtbild giebt, welches durchaus gut ist, und daß dieses Gesamtbild nicht einmal besser wird, wenn man zu den Kugelfunktionen 5ter Ordnung fortschreitet. Gauß hat hier, wie überall, ein sehr gutes Sensorium für die Bedürfnisse des Basis gehabt. Auch die Durchführung der Rechnung im Einzelnen ist hochinteressant. —

---

*) Unter Mitwirkung insbesondere von A. Schmidt, Gotha.

Wir werden uns nunmehr zum zweiten Hauptteile dieser Vorlesung, den ich

II. Freie Geometrie (ebener Curven)

überschreibe: „frei", insofern wir kein Coordinatensystem wie früher, wo wir den Funktionsbegriff an ein festes rechtwinkeliges Coordinatensystem anlehnten, bevorzugen. Allerdings werde ich wegen Mangels an Zeit nur die ebenen Curven behandeln, woraus sich der Klammerzusatz erklärt.

Hier ergiebt sich nun wieder von selbst die Zweiteilung:

1/ Präcisionsmathematische
2/ Approximationsmathematische } Betrachtungen.

Dabei nehme ich wieder Bezug Anschluß an die Ideenbildungen der analytischen Geometrie d.h der Geometrie, die sich (auf Grund der geometrischen Axiome) explicite auf den Zahlbegriff stützt; im Gegensatz zur synthetischen Geometrie, die (auf Grund derselben Axiome) an den Figuren selbst operiert.

Hierzu liegt an sich keine sachliche Notwendigkeit vor. Man könnte alle Fragen, die ich im Folgenden zu berühren habe, auch von Seiten der synthetischen Geometrie fassen, aber einmal würde dabei der Ausblick auf andere Gebiete der Mathematik, die von den Synthetikern noch nicht bearbeitet sind, verloren gehen und andrerseits liegen die betreffenden Untersuchungen in der Litteratur fast ausschliesslich in analytischer Form vor. —

Das Verhältnis von Analysis und Geometrie ist hier im Princip kein andres als im ersten Teil: wir präcisieren die geometrischen Ideen, indem wir sie mit analytischen Entwickelungen begleiten, und wir beleben die Analysis durch den Hinblick auf die geometrischen Figuren!

II, 1 Präcisionsgeometrische Betrachtungen zur elementaren Geometrie.

Es handelt sich also für uns zuerst um präcisionsmathematische Betrachtungen, und zwar das Nächstliegende, um solche, bei denen die sogenannte Mengenlehre fundamental ist.

Es giebt bislang nur erst ein Buch, das die hier besonders in Betracht kommenden neuen Dinge in leidlichem Zusammenhange zusammengestellt enthält, nämlich:

Camille Jordan: Cours d'Analyse, 2 éd. Paris 1893 i
Es steht aber zu hoffen, dass bald die Fortsetzung des
Schoenflies'schen Referates über Mengenlehre für die
Deutsche Mathematiker-Vereinigung (von dem der
erste Teil im Bd. 8 der Berichte erschienen ist) ein
bequemes Hilfsmittel zur Orientierung auf dem
ganzen in Frage stehenden Gebiete sein wird.

Ich gebe zunächst eine kleine Übersicht über
die einfachsten hierher gehörigen Definitionen und
Sätze:

1) Die Coordinaten x, y eines Punktes sind Zah-
len im Sinne des modernen Zahlbegriffs, d.h. für
uns definiert als unendliche Dezimalbrüche, die
eventuell abbrechen.

2) Ein Aggregat mehrerer solcher Punkte (eine
Punktmenge) wird, wenn unendlich, an sich Ob-
jekt eines eingehenden geometrischen Studiums,
wobei sich sehr bemerkenswerte Unterscheidun-
gen ergeben:

a) Der Satz von der Verdichtungsstelle:
Sind in einem endlichen Gebiete unendlich vie-
le Punkte gegeben, so besitzen diese mindestens ei-
ne Verdichtungsstelle (einen Grenzpunkt), d.h. eine
Stelle, wo die Punkte sich unbegrenzt häufen.

b/ Eine Punktmenge kann abzählbar sein oder nicht.

c/ Enthält sie ihre Grenzpunkte, so heißt sie abgeschlossen. Ist jeder Punkt der Menge ein Grenzpunkt, so heißt sie perfekt.

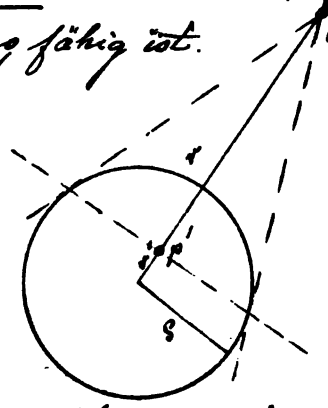
d/ Eine Punktmenge kann überall oder nirgendwo dicht sein. Beispielsweise kann man bei der Menge aller rationalen Punkte um keinen Punkt einen so kleinen Kreis beschreiben, daß in dessen Innern nicht immer noch eine unbegrenzte Zahl rationaler Punkte liegt; daher heißt die Menge der rationalen Punkte überall dicht. Würden sich in jedem noch so kleinem Gebiete Lücken nachweisen lassen, innerhalb deren keine Punkte der Menge liegen, so hätten wir eine nirgendwo dichte Menge.

e/ Man fragt weiter, ob die Mengen einen endlichen Flächeninhalt haben oder den Inhalt 0, d.h. ob der Limes der Gesamtsumme möglichst kleiner, die Punkte der Menge einschließenden Kreise endlich ist oder Null! Analog könnte man von einem Umfange einer Punktmenge sprechen.

Sie sehen, es sind dies lauter Begriffsbestimmungen, die an sich leicht aufzufassen sind, deren Würdigung und Verständnis aber erst aus der Be-

schäftigung an konkreten Beispielen erwächst.

Ich möchte Ihnen nun von vornherein die Überzeugung erwecken, daß es sich beim Studium der Funktionentheorie um echt geometrische Fragestellungen handelt. Statt also Beispiele zu betrachten, die man sich, wie sonst wohl geschieht, scheinbar will kürlich arithmetisch zurecht macht, und die dadurch den Eindruck des Künstlichen hervorrufen, wollen wir ein geometrisches Erzeugungsprinzip einer Punktmenge benutzen, welches sich in der Theorie der automorphen Funktionen entwickelt hat und noch großer Ausdehnung fähig ist.



Wir betrachten zunächst die Transformation durch reciproke Radien oder die Inversion am Kreise.

Es sei ein Kreis vom Radius s gegeben und ein Punkt p außerhalb des Kreises. Dann zieht das in der Formel $pp' = \varrho^2$ ausgedrückte Gesetz der Inversion einen Punkt p' im Innern des Kreises, den man den zu p inversen Punkt nennt (vergl. die Figur). Diese Transformation durch reciproke Radien nennt man gelegentlich „Spiege-

lung am Kreise"; dies ist aber nur cum grano salis zu verstehen, weil wir hier keineswegs das Gesetz der optischen Spiegelung am Convexspiegel haben. Nur wenn der Kreis $\mathfrak{S}$ in den Linearkreis ausartet, haben wir direkte Spiegelung im optischen Sinne.

Als Eigenschaften dieser Transformation setze ich die Eigenschaft, stets Kreise wieder in Kreise zu transformieren und dabei die Winkel, unter denen sich die Kreise schneiden, zu erhalten, als bekannt voraus. Dabei ist hervorzuheben, daß die Gerade mit zu den Kreisen gerechnet wird und einfach als Kreis mit unendlich großem Radius anzusehen ist. Das Unendliche erscheint als einzelner Punkt; die Geraden sind eben diejenigen Kreise, die durch den Punkt „∞" gehen. Man kann die Beziehung zwischen p und p' auch dadurch definieren, daß man sagt: p und p' sind die gemeinsamen Punkte eines Büschels von Kreisen, welche den Grundkreis $\mathfrak{K}$ orthogonal schneiden. Diese Definition hat den Vorzug, nur mit Elementen zu operieren, welche bei irgend welcher weiteren Inversion invariant sind.

Was nun speziell in der Theorie der automor-

phen Funktionen mit dieser Transformation gemacht wird, ist dieses, daß man beliebig viele derartige Transformationen mit einander kombiniert.

Nehmen Sie folgendes Beispiel.

Es seien 3 Kreise gegeben, die sich nicht schneiden, aber einen Bereich gemeinsam einschließen, K_1, K_2, K_3 und ein Punkt p. Wir leiten sofort die Inversen Punkte p_1, p_2, p_3 ab und werden von da aus weitergehen, indem wir nun diese Punkte an den Kreisen spiegeln u.s.w. Symbolisch bezeichnen wir die verschiedenen so entstehenden Punkte durch

$$(p)\, S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} S_3^{\alpha_3} S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} S_3^{\beta_3} \ldots\ldots,$$

wo die $\alpha, \beta, \ldots$ irgendwelche Zahlen und S_1, S_2, S_3 die Transformationen an den Kreisen K_1, K_2, K_3 bedeuten. Da jede Inversion die Periode 2 hat (also S^2 allemal $= 1$ ist), so genügt es, die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ auf die Werte 0 und 1 einzuschränken. Die Frage ist:

Wie können wir uns von der Menge der so entstehenden Punkte ein Bild machen? was haben sie für Grenzstellen u.s.w.?

Wir beschäftigen uns im folgenden also mit einer Menge solcher Punkte, die aus einem ge-

benen Punkte dadurch hervorgeht, daß man drei beliebige Inversionen in irgendwelcher Combination auf ihn anwendet, daß man also auf ihn die ganze Gruppe der „Transformationen" anwendet, die aus unsern drei „Erzeugenden" erwächst. Wir nennen die betreffenden Punkte kurz aequivalente Punkte.

Sollte aber Jemand einwenden, diese Fragestellung sei trotz ihrer rein geometrischen Form immer noch sehr künstlich, so ist zu erwähnen, daß die Punktmenge, von der wir hier reden, d.h. die Menge, die aus einem beliebig vorgegebenen Punkte vermöge der wiederholten Inversion an drei oder mehr Kreisen oder auch Kugeln im Raume erwächst, von W. Thomson und B. Riemann schon um das Jahr 1850 bei Aufgaben der Elektrostatik betrachtet worden ist. Studirt man nämlich das Gleichgewicht der Elektricität auf n Kugeln des Raumes oder auf n Rotationscylindern mit parallel gestellten Axen (deren Normalschnitt unsere ebene Figur wird), so führt die „Methode der electrischen Bilder" genau zur Erzeugung und zum Studium unserer Punktmenge.

Dies möge dazu dienen, das Interesse an un-

serer speziellen Fragestellung zu beleben.

Wir wollen uns die Aufgabe zunächst bei zwei sich nicht schneidenden Kreisen K_1 und K_2 klar machen (vgl. die Figur auf pg. 218); die zugehörigen Inversionen nennen wir S_1 und S_2.

Ein erster Kunstgriff ist, daß wir nicht einen einzelnen Punkt p, sondern gleich die sämtlichen Punkte des zwischen den beiden Kreisen eingeschlossenen Gebietes, das wir mit i bezeichnen, den successiven Operationen unterwerfen. Die dabei entstehenden Bereiche nennen wir zu i (und damit auch zu einander) aequivalent; wir werden sehen, daß sich diese aequivalenten Bereiche lückenlos aneinander fügen, ohne irgendwo übereinander zu greifen, wobei schließlich die ganze Ebene bis auf zwei Grenzpunkte (a_1 und a_2 in der Figur) überdeckt wird. Die Übersicht über die Menge unter einander aequivalenter Punkte ist gewonnen, sobald wir erst die Übersicht über diese aequivalenten Bereiche haben. Denn irgend ein Punkt p des Ausgangsbereiches wird zu jedem einzelnen der aequivalenten Bereiche seinerseits einen und nur einen aequivalenten Punkt haben.

Um nun die zu i aequivalenten Bereiche zu construieren, so entstehen aus i durch Anwendung der Spiegelungen S_1 und S_2 zunächst zwei neue Bereiche (cf. Figur), die wir selbst S_1 und S_2 nennen. S_1 legt sich lückenlos längs K_1 an i an und ist seinerseits (nach innen hin) von einem neuen Kreise begrenzt, der in der Figur K_2' genannt ist, weil er das (durch S_1 entstehende Bild des Kreises K_2 ist). Genau so legt sich an i nach rechts hin der Bereich S_2 mit dem innern Begränzungskreis K_1'.

Es handelt sich jetzt um Construktion ferneper zu i aequivalenter Bereiche und schliesslich der Gesamtheit dieser Bereiche. Zu dem Zwecke wollen wir zunächst einmal die Bereiche S_1 und S_2 je an ihrem innern Begrenzungskreise spiegeln, also S_1 an K_2', S_2 an K_1'. Ich sage, daß die neuen Bereiche (die sich glatt in die „Öffnungen" hineinlegen, welche die Bereiche S_1 und S_2 darbieten), aus i durch einfache Combination der Operationen S_1, S_2 hervorgehen, also zur Serie der von uns gesuchten aequivalenten Bereiche gehören.

In der That, betrachten wir die Spiegelung an

K_1'. Zwei Punkte, die in Bezug auf K_1' invers liegen, gehen ersichtlich vermöge S_2 aus solchen zwei Punkten hervor, die in Bezug auf K_1 invers liegen. Denn letztere sind die Basispunkte eines zu K_1 orthogonalen Kreisbüschels, und also sind die beiden Punkte, die aus ihnen vermöge S_2 hervorgehen, Basispunkte eines Kreisbüschels, das zu demjenigen Kreise orthogonal ist, der aus K_1 vermöge S_2 hervorgeht, d.h. zu K_1'. Der Bereich, welcher aus dem Bereiche S_2 durch Inversion an K_1' entsteht, läßt sich daher auch so erzeugen, daß man den Bereich i durch die Operation S_1 in den Bereich 3_1 verwandelt, und dann auf diesen die Operation 3_2 anwendet. Der neue Bereich wird also durch $S_1 S_2$ zu bezeichnen sein und gehört in der That zur Serie der von uns gesuchten, zu i „aequivalenten" Bereiche. — Ebenso wird der Bereich, der sich aus S_1 durch Spiegelung an K_2' ergiebt, mit $S_2 S_1$ zu bezeichnen sein.

In der so geschilderten Construktion (beg. dem zugefügten Beweise) liegt nun überhaupt das Fortsetzungsprincip, dessen wir uns zur Erzeugung neuer und neuer aequivalenter Bereiche bedienen werden. Wir werden jeden neugewon-

neuen Bereich (jetzt also zunächst die Bereiche $S_1 S_2$ und $S_2 S_1$) immer wieder an seinem äußeren Begrenzungskreise spiegeln. Solcherweise entstehen nach rechts hin (cf. die Figur) die lückenlos aufeinander folgenden und successive ineinander geschalteten Bereiche S_2, $S_1 S_2$, $S_2 S_1 S_2$, $S_1 S_2 S_1 S_2$, ..., nach links hin die ebenso aufeinander folgenden S_1, $S_2 S_1$, $S_1 S_2 S_1$, ..., die sich immer mehr auf die zwei schon genannten Grenzpunkte a_1 und a_2 zusammenziehen.

Und nun ist das Schöne, daß die solcherweise durch unser Fortgangsprincip gelieferten Bereiche die Gesamtheit der gesuchten aequivalenten Bereiche erschöpfen. In der That kommt ja jede Zusammenstellung, die wir aus den Symbolen S_1 und S_2 durch Wiederholung bilden können, mit Rücksicht darauf, daß $S_1^2 = 1$ und $S_2^2 = 1$ ist, auf eine bloße Aufeinanderfolge abwechselnder S_1, S_2 heraus und jede derartige Aufeinanderfolge findet sich als Benennung für eines der durch unser Fortgangsprincip ergiebigen Gebiete wieder. (Endet die Aufeinanderfolge, die wir betrachten mögen, mit S_2, so findet sich das zugehörige Gebiet in der Figur rechter Hand, sonst linker Hand).

Wir haben in der durch unser Fortgangsprin-

ein erzeugten Figur also die Gesamtheit der aequivalenten Bereiche vor uns, und damit auch einen Überblick über die Gesamtheit der aequivalenten Punkte. Wir bemerken gleichzeitig, daß die Gesamtfigur nicht nur in Bezug auf K_1 und K_2, sondern in Bezug auf jeden einzelnen Kreis, längs dessen zwei Nachbargebiete aneinander grenzen, also z.B. in Bezug auf K_1' oder in Bezug auf K_2' sich selbst invers ist. Der Beweis möge hier für den Kreis K_1' geführt werden. Durch die Inversion an K_1' entsteht, wie wir wissen, aus dem Gebiete S_2 das Gebiet $S_1 S_2$. Die Inversion an K_1' hat also ihrerseits das Symbol $S_2^{-1} S_1 S_2$, oder, was dasselbe ist, $S_2 S_1 S_2$. Will ich nun diese Operation auf irgend einen der von uns erzeugten Bereiche anwenden (der selbst durch irgend eine Aufeinanderfolge der Symbole S_1, S_2 gegeben ist), so habe ich die Aufeinanderfolge einfach die Buchstabenfolge $S_2 S_1 S_2$ hinzuzusetzen, wodurch, wie ersichtlich, die Benennung eines anderen, ohnehin in unserer Figur vorhandenen Bereiches entsteht. Hierin liegt der Beweis.

Mit dem so bewiesenen Satze haben wir zugleich eine Verallgemeinerung unseres Fortgangsprincipes. Wir hatten bisher den Kreis K_1' nur so benutzt,

dass wir an ihnen den angrenzenden Bereich S_2 spiegelten und dadurch den gleichfalls angrenzenden Bereich $S_1 S_2$ gewannen. Wir können offenbar ebensowohl die sämmtlichen drei schon vorher constituierten Bereiche, nämlich die nebeneinander liegenden Bereiche S_2, 1, S_1, gleichzeitig an K_1' spiegeln und erhalten dadurch mit einem Schlage drei neue Bereiche, nämlich $S_1 S_2$, $S_2 S_1 S_2$, $S_1 S_2 S_1 S_2$. Dann haben wir im Ganzen 6 nebeneinander liegende Bereiche und die können wir dann alle 6 gleichzeitig an dem innern Begrenzungskreise von $S_1 S_2 S_1 S_2$ invertieren, um mit einem Schlage 6 neue Bereiche zu haben u.s.w. Ich nenne dies das erweiterte Fortgangsprincip.

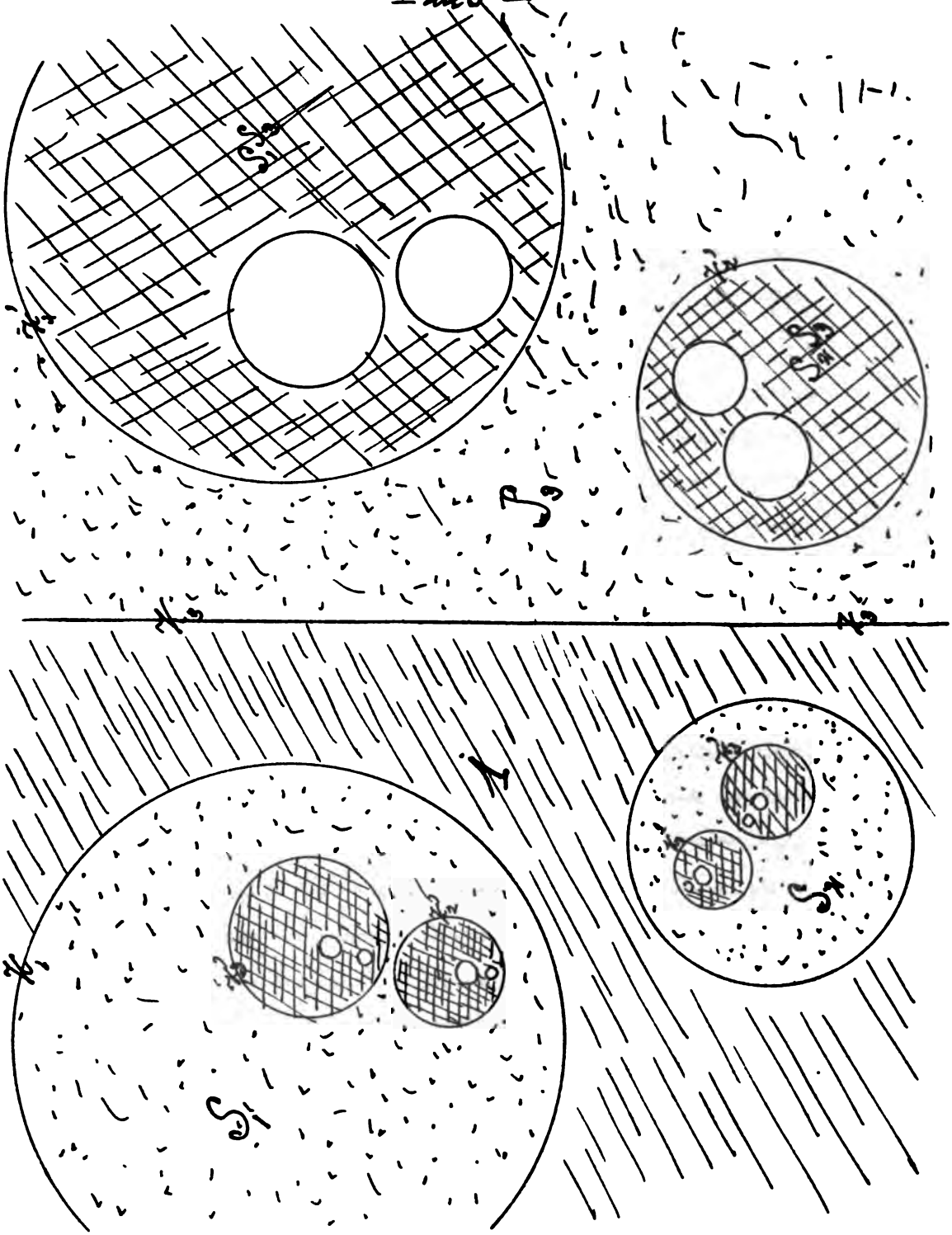
Die hiermit geschilderten Beziehungen, welche man an der Figur in's Einzelne verfolgen möge, geben uns nunmehr das Mittel, um auch in den höheren Fällen zurecht zu kommen, wo Inversionen an mehr als zwei gegebenen Kreisen unbegrenzt oft mit einander combiniert werden sollen.

Wir betrachten zunächst den Fall von drei Kreisen K_1, K_2, K_3 (die sich nicht schneiden und mit einander ein gemeinsames Gebiet eingrenzen, welches wir 1 nennen).

Wir nehmen speziell einen Kreis K_3 als Gerade an (vergl. die Figur pg. 225). Wir unterwerfen das Gebiet i den Inversionen an K_1, K_2, K_3 und erhalten die Bereiche S_1, S_2, S_3 mit je zwei inneren Begrenzungskreisen K_2', K_3' u.s.w. Unser Fortgangsprincip ist jetzt dieses, daß wir jeden der neuen Bereiche S_1, S_2, S_3 an den inneren Kreislinien, durch welche er begrenzt ist, weiter invertieren. Es entsteht jeweils ein neuer Bereich, wieder mit zwei inneren Begrenzungskurven und an diesen invertieren wir abermals und so fort in's Unendliche. Es wird so die ganze Ebene „einfach" mit unendlich vielen aequivalenten Bereichen überdeckt resp mit lauter Tripeln von unendlich vielen unter sich aequivalenten Punkten, mit Ausnahme der Grenzpunkte, denen die Öffnungen der jeweils construierten Bereiche, indem sie immer kleiner und zahlreicher werden, „zustreben."

Es entsteht die Frage: Was läßt sich über die Menge der Grenzpunkte noch Vernünftiges aussagen, nachdem die Vorstellungskraft schon bei den ersten wenigen Inversionen ermüdet?

Ich recapitulire noch einmal das Wesentliche in drei Nummern:



1) Nicht einen einzelnen Punkt p, sondern gleich den ganzen Bereich i (Fundamentalbereich) unterwerfen wir den successiven Transformationen.

2) Die Vervielfältigung unseres Ausgangsbereiches geschieht am besten (weil für die Auffassung leichter) so, daß man jeden neu erhaltenen Bereich oder auch die ganze bis dahin erhaltene Figur immer wieder an den freien kreisförmigen Begrenzungslinien, die er darbietet, spiegelt. (Ursprüngliches und erweitertes Fortgangsprincip).

3) Die ganze Ebene wird solcherweise mit unendlich vielen Bildern des Ausgangsbereiches, die sich lückenlos aneinander schließen, vollständig bedeckt bis auf die unendlich vielen Grenzpunkte, denen man bei Fortsetzung unserer Konstruktion zustrebt.

Man könnte natürlich auch 4, 5 oder mehr Ausgangskreise annehmen. Da tritt denn aber eine Complikation ein, die ich jetzt bezeichnen will, oder vielmehr, ich will hervorheben, daß unsere auf 3 Kreise bezügliche Figur noch einen gewissen Charakter der Einfachheit besitzt.

Drei Kreise haben bekanntlich einen und nur einen Orthogonalkreis und dieser gemeinsame Orthogonalkreis geht bei den Inversionen S_1, S_2, S_3 in

sich selbst über, weil er der einzige Orthogonalkreis ist. Es geht daher auch bei allen Wiederholungen und Combinationen dieser Inversionen der Orthogonalkreis in sich selbst über. Es folgt, daß alle die unendlich vielen Kreise, die aus drei Ausgangskreisen bei Inversion erwachsen, auf dem festen Orthogonalkreis senkrecht stehen, daß sich also alle Bereiche, die aus dem Fundamentalbereiche erwachsen, gleichsam auf den Orthogonalkreis stützen, d.h. sie durchsetzen ihn und sind in Bezug auf den Orthogonalkreis selbst symmetrisch. Die Bereiche „reihen" sich entlang dem Orthogonalkreis „aneinander". Infolgedessen sind alle die Grenzpunkte, von denen wir reden, auf der Peripherie des gemeinsamen Orthogonalkreises angeordnet.

Das ist nun insofern sehr beruhigend, weil wir auf diese Weise sozusagen einen Halt zur Beurteilung der Lage der Grenzpunkte haben.

Gehen wir nun aber zu 4 und mehr sich nicht schneidenden Kreisen über (die immer so liegen müssen, daß sie einen gemeinsamen Bereich einschließen), so kann im Besonderen allerdings auch hier ein Orthogonalkreis existieren, sodaß dann die Grenzpunkte

das nämliche Verhalten zeigen. Im Allgemeinen existiert er aber nicht, sodaß es keinen Ariadnefaden giebt, der uns mit Sicherheit durch das Labyrinth der aequivalenten Bereiche und ihrer Grenzpunkte hindurchführen könnte.

Nun wollen wir aber auch im allgemeinen Falle etwas über die Mannigfaltigkeit der Punkte aussagen. Zunächst wiederhole ich, daß eine räumlich konkrete Vorstellung des Resultates schon bei $n=3$ und um so mehr bei $n>3$ unmöglich ist, unsere Vorstellungskraft findet gar bald an den ersten Inversionen ihre Schranken[1], und es gelten auch für uns hier vor dem Unendlichen stehend die Worte Schillers („die Größe der Welt"):

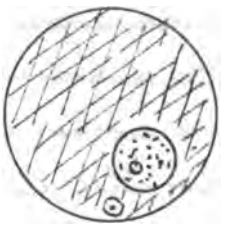
Senke nieder
Adlergedanke, dein Gefieder!
Kühne Seglerin, Phantasie,
Wirf ein mutloses Anker hie.

Aber um so bewundernswerter ist es, daß man, indem man an der <u>begrifflichen</u> Definition derselben festhält, über die Mannigfaltigkeit der Grenzpunkte nun thatsächlich etwas aussagen kann.

---

[1] Es ist dies ein besonders schönes Beispiel für meine Thesis, daß die Gegenstände der Präcisionsgeometrie jenseits unseres Vorstellungsvermögens liegen.

Und dies ermöglicht zu haben, ist das besondere Verdienst von G. Cantor, der zum ersten Male auch das Unendliche als solches den mathematischen Überlegungen zu unterwerfen lehrte.



Es sei der nebenstehend gezeichnete Kreis ein Begrenzungskreis unserer Figur, in den alle Details der Aussenfigur hineingespiegelt werden. Es ist klar, dass nicht das ganze Innere des Kreises mit singulären Punkten ausgefüllt ist, sondern dass in ihm zunächst neue singularitätenfreie Bereiche mit neuen kreisförmigen Grenzlinien Platz finden. Wir schließen, dass man keinen endlichen Bereich, auch kein endliches Stück einer Curve angeben kann, das ganz mit singulären Punkten besetzt wäre. Wir kommen also zu unserm ersten Schluss:

I) Aus unserm Fortgangsprincip ergiebt sich, dass die Menge der singulären Punkte nirgendwo dicht liegt.

Wir nehmen nunmehr einen singulären Punkt heraus und umgeben ihn mit einem kleinen Begrenzungskreis. Dann ist klar, dass man, da die ganze Aussen-

figur in diesen Kreis hineingespreizt wird, mit unendlich vielen singulären Punkten in diesen Begrenzungskreis hinein und somit unserm anfänglichen Grenzpunkt beliebig nahe kommt, d.h. jeder singuläre Punkt unserer Figur ist selbst ein Verdichtungspunkt unendlich vieler singulärer Punkte, oder kürzer:

2) <u>Die Menge der singulären Punkte ist perfekt.</u>

Die Sätze 1) und 2), nach unserer bei dem Endlichen gebildeten Gewöhnung scheinbar unverträglich, schließen sich hier, wo wir es mit <u>unendlichen</u> Punktmengen zu thun haben, nicht aus.

Wir fragen weiter nach der <u>Mächtigkeit der Grenzpunkte</u>.

Gehen wir von 3 Kreisen K_1, K_2, K_3 aus; jeder Kreis z.B. K_3 erhält in seinem Innern zwei neue K_1' und K_2' u.s.w. Wollen wir nun auf eine Verdichtungsstelle zuschreiten, so haben wir Kreise 1, 2, 3 d.h. K_1, K_2, K_3 beziehungsweise zu ihnen aequivalente Kreise in einer genau anzugebenden Reihenfolge zu überschreiten. Oder etwas anders gewandt:

Der einzelne singuläre Punkt ist vollständig durch eine unendliche Aufeinanderfolge der

Zahlen 1, 2, 3 ... charakterisiert, die nur so gebildet ist, daß eine zweimal dieselbe Ziffer nacheinander folgt.

Und nun ist die Frage: Wieviel solcher unendlicher Reihen giebt es?

Die Anzahl aller dieser Combinationen von 3 Zahlen ist (was ich nicht noch weiter auseinanderlegen will) so groß wie die Anzahl aller Dyalbrüche, d. h. aller Brüche, die nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ fortschreiten. Wir kommen somit auf die Mächtigkeit des Continuums.

Sie sehen, wie wir schon bei dem allereinfachsten Beispiele automorpher Figuren die wunderschönsten Eigenschaften der Zahlen beieinander haben!

Wir gehen nun weiter und fragen nach dem Inhalte unserer Punktmenge, d. h.

Man untersuche, ob die Summe der immer kleiner, aber immer zahlreicher werdenden Kreisflächen, in welche die singulären Punkte eingeschlossen sind, bei allseitiger Fortsetzung unserer Construktion beliebig klein wird, oder endlich bleibt. Im ersten Falle sagen wir, der Inhalt ist Null, im zweiten Falle giebt man von einem endlichen Flächen-

inhalt sprechen.

Unter dem Umfange werden wir ganz entsprechend den Linien der Umfänge der Dreiecke verstehen, in welche wir unsere Punkte einschließen können.

Mit diesen Fragen kommen wir bereits an das Gebiet des Unbekannten (aber nicht Unerkennbaren). Die Sache wird nicht einmal schwierig sein; sie ist nur noch nicht bearbeitet. Das Einzige, was man vorläufig in dieser Hinsicht sagen kann, ist, daß der Inhalt der Punktmenge, im Falle ein Orthogonalkreis vorhanden ist, verschwindet.

Dies giebt mir Anlaß, in folgender Weise fortzufahren.

Zunächst bemerke ich, daß die Theorie der automorphen Funktionen dazu führt, noch sehr viel komplizirtere Figuren als die jetzt von uns besprochenen zu betrachten (man vgl. die zahlreichen Figuren in Fricke - Klein: Theorie der automorphen Funktionen I, Leipzig 1897, pg 428 ff). Überhaupt aber treten unendliche Mengen von Punkten oder sonstigen Gebilden, die die Geometrie betrachtet, immer dann ein, sobald man in die Geometrie die Idee des gesetzmäßig unendlich fortschreitenden Construktionsprocesses einführt. Das heißt aber, daß die Men-

gonlehre nicht nur für geometrische Figuren der Theorie der automorphen Funktionen, sondern genau so für zahlreiche andere Teile der Geometrie ihre grundlegende Bedeutung besitzt.

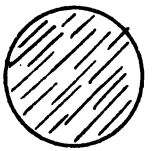
Ferner aber: Alles bisher ist natürlich Präzisionsmathematik. In der Approximationsmathematik geht das hier Charakteristische vollständig verloren.

Drittens will ich der Hoffnung Ausdruck verleihen, daß die Kongruenzlehre, sowie sie der Geometrie ihre Hilfe bietet, auch umgekehrt durch letztere neue Förderung erhalten möge. Bisher erscheinen die Beispiele, welche die Kongruenztheoretiker herbeibringen, vielfach als etwas Künstliches, während wir doch, von der Geometrie ausgehend, wie wir sahen, auf ganz natürlichem Wege zu echten Fragen der Kongruenzlehre geführt werden. Die Geometrie ist da noch der wunderbarsten Weiterbildungen fähig!

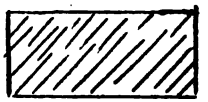
Bislang sprachen wir nur von einer Menge diskreter Punkte. Die nächstliegende weitere Frage, die auch wieder zuerst auf dem Boden der Funktionentheorie erwachsen ist und für die zuerst Weierstraß in seinen Vorlesungen eine Antwort nötig hatte, ist:

Wann werden wir eine zweidimensionale Punkt

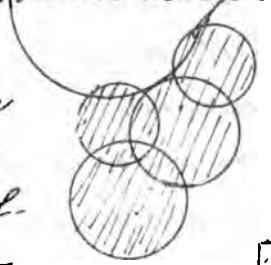
menge d.h eine Menge der Ebene ein Continuum nennen?

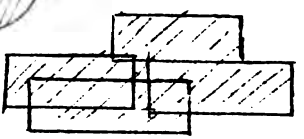


Als einfachstes Beispiel bietet sich für das, was wir ein Continuum in der Ebene nennen, die Gesamtheit der Punkte im Innern eines Kreises oder Rechteckes dar, wobei wir durch Verabredung die Randpunkte von der Menge selbst ausschließen wollen.



Des Weiteren bezeichnet man dann als Continuum die Gesamtheit der innern Punkte solcher Kreise oder rechteckigen Flächen, die dachziegelartig übereinander greifen.





Wir nehmen damit folgende beiden Eigenschaften in die allgemeine Definition eines zweidimensionalen Punktcontinuums auf:

1/ Zunächst verlangen wir „den Zusammenhang" der Menge überhaupt (was man auch noch genauer mengentheoretisch definieren mag).

2/ Wir verlangen ferner, daß es möglich sein soll um jeden Punkt der Menge einen Kreis zu beschreiben, sodaß alle inneren Punkte desselben der Men-

angehören.

Was nun die Frage nach dem Rande einer solchen Punktmenge betrifft, so erlauben uns unsere bisherigen Kenntnisse hier schon die mannigfachsten Beispiele für die Begrenzung herzubringen:

1) Alle Punkte der Ebene bis auf einen Punkt O können den Rand angehören.

2) Indem wir uns an das auf pg 213 ff. behandelte Beispiel aus der Theorie der automorphen Funktionen erinnern, sehen wir, dass ein Continuum auch von einer unendlichen Reihe von Punkten begrenzt werden kann, die aber nirgendwo dicht zu sein brauchen (Reihe der Grenzpunkte bezw. Continuum der sämtlichen miteinander äquivalenten Bereiche).

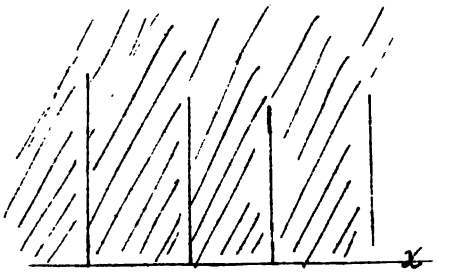
3) Des Weiteren kann die Begrenzung von einer Curve im gewöhnlichen Sinne (Kreis, Rechteck u.s.w.) gebildet werden.

4) Es giebt aber noch andere Begrenzungen, die in neuerer Zeit besonders von W.F. Osgood[1] betrachtet werden.

Wir beschränken uns z.B. auf die positive Halbebene (oberhalb der x-Axe) und machen

---

[1] Siehe z.B. Trans. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900) pg. 310 ff.



an bestimmten Stellen gerad-
linige Einschnitte, die wir im
Gegensatz zu den sonstigen Punk-
ten der Halbebene nicht mit
zum Bereich zählen wollen. Nunmehr denken wir
uns die Zahl dieser Einschnitte stets größer werdend
wenn sie nur nicht überall dicht liegen, giebt es
immer noch Streifen des Bereiches, die sich zwischen
den Einschnitten hindurch an die x-Axe heranzie-
hen. Dass es solche nirgendwo dichte und dabei per-
fekte Mengen von der Mächtigkeit des Continuums
giebt, sahen wir früher; man erinnere sich an die
singulären Stellen auf dem Orthogonalkreis un-
serer automorphen Figur. Wir sehen also, dass ein
Continuum auch unendlich viele Einschnitte be-
sitzen kann, die sich so gruppieren, wie die Punk-
te einer nirgendwo dichten, aber trotzdem un-
endlichen und dabei perfekten Menge!

Diese 4 Beispiele zeigen uns, wie mannigfaltig
die Begrenzung eines Bereiches (die man doch
gewöhnlich kurzweg als Curve voraussetzt) sein
kann, sodass wir dem heutigen Stande der Wis-
senschaft entsprechend sagen müssen:

Ein Continuum kann Grenzen der aller-

verschiedensten Art haben, und eine Curve als Grenze eines Bereiches kurzweg zu definieren, ist völlig unzulässig (natürlich nur im Gebiete der Präzisionsmathematik, wo wir es mit den auf Grund des modernen Zahlbegriffs idealisierten Gebilden, hier speziell mit den idealisierten Gebilden der Raumanschauung zu thun haben).

Wie definieren wir denn nun eine Curve? Dies geschieht jetzt allgemein so, daß man folgenden Ansatz macht:

Man giebt eine Variable t, die alle Werte eines Intervalls $a \ldots b$ durchlaufen soll und setzt die Coordinaten eines Punktes gleich stetigen Funktionen dieser Hilfsvariablen, also $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; von der solcherweise definierten Punktmenge sagt man, daß sie eine Curve bildet. In freie Worte gefaßt lautet also die Definition einer Curve:

Eine ebene Curve ist eine Punktmenge der Ebene, die stetig auf ein Geradenstück abgebildet werden kann.

Unwillkürlich mischen sich übrigens bei einer solchen Definition der Curve durch einen Parameter t mechanische Auffassungen ein. Man kann t als Zeit fassen (woher auch die gewöhn-

liche Bezeichnung durch den Buchstaben t, und sagen:

Während der Parameter t die Zeit von a bis b durchläuft, läuft der Punkt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ auf der Curve.

Oder anders gefasst: Die Curve ist die Bahn eines Punktes, der sich während eines Zeitintervalls stetig bewegt.

Dies ist alles sehr leicht zu verstehen. Schwieriger wird es, wenn wir nach den gestaltlichen Verhältnissen fragen, die bei einer so definierten Curve auftreten können.

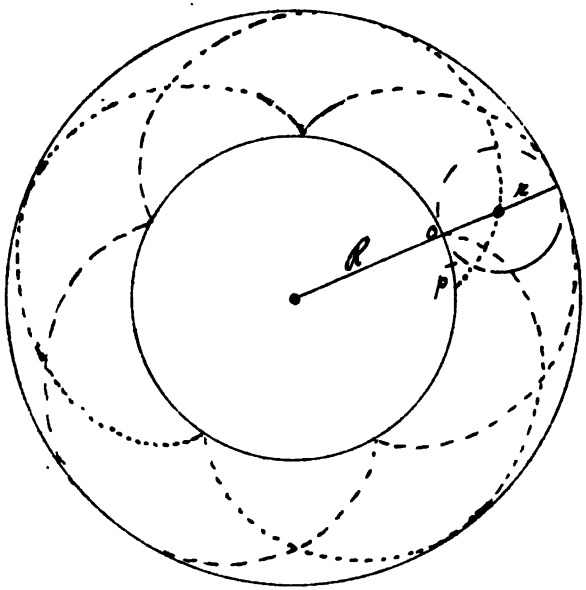
Ich muss hier insbesondere auf eine Entdeckung von Peano aufmerksam machen, die er 1890 in den Mathem. Ann. Bd. 36 veröffentlichte und die von Hilbert Mathem. Ann. Bd 38 (1891) geometrisch erläutert wurde. Es handelte sich um die Bemerkung, dass eine durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definierte Curve ein ganzes Flächenstück völlig bedecken kann.

Es ist übrigens nicht etwa schwer, sich ein derartiges Beispiel zu bilden, nur ist man nicht gewöhnt an solche Figuren sofort zu denken.

Ich ordne meinen Vortrag über die Peano-Curve (oder vielmehr ein einzelnes Beispiel derselben

ben) in der Weise an, daß ich zuerst sage, was mit einer solchen Curve nicht gemeint ist. Jemand könnte nämlich, wenn er von dem Baco'schen Resultate hört, auf die Verhältnisse bei den Cyklo_iden als etwas altbekanntes hinweisen.

Lassen wir nämlich auf einem Kreis mit dem Radius R einen andern mit dem Radius r ab_rollen und nehmen das Verhältnis $^{r}/_{R}$ irratio_nal, so erhalten wir eine Epicykloide, die sich



. mionals schließt, und in Folge davon den ring_förmigen Bereich, in dem sie liegt, überall dicht überdeckt. Darin liegt, daß wir jedem Punkt, den

wir z. B. auf der Peripherie von R geben, beliebig nahe kommen können, aber es liegt nicht darin, daß der Punkt auch wirklich erreicht wird. Ein Beispiel für einen Punkt, den ich nicht erreiche, wie oft auch der rollende Kreis auf dem festen Kreis abläuft, ist ein Punkt p, der von dem Ausgangspunkte O der Rollbewegung um den entlang dem festen Kreise gemessenen Bogen $2\pi R\frac{m}{n}$ entfernt ist, wo m und n ganze Zahlen sind. In der That kommen wir in diesem rationalen Punkt bei unserm vorausgesetzten irrationalen Verhältnis $\frac{R}{r}$ nicht ein, es giebt kein bestimmtes t, das uns diesen Punkt lieferte. Also realisiert diese Curve, wie interessant sie auch an sich sein mag, nicht das, wovon in dem Peano'schen Satz die Rede ist, indem bei Peano eine Curve hergestellt werden soll, die jeden Punkt eines Flächenstücks für einen bestimmten Wert von t wirklich erreicht.

Nun gleich zur geometrischen Erläuterung der Peano'schen Curve!

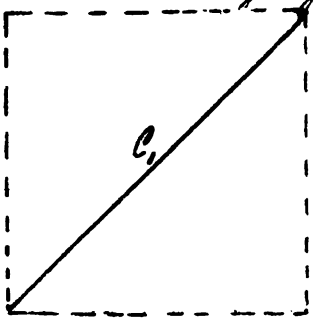
Ich gebe zuvor noch ein Citat auf

E. H. Moore: On certain crinkly curves, Trans. of the American Math. Soc. 1 (1900),

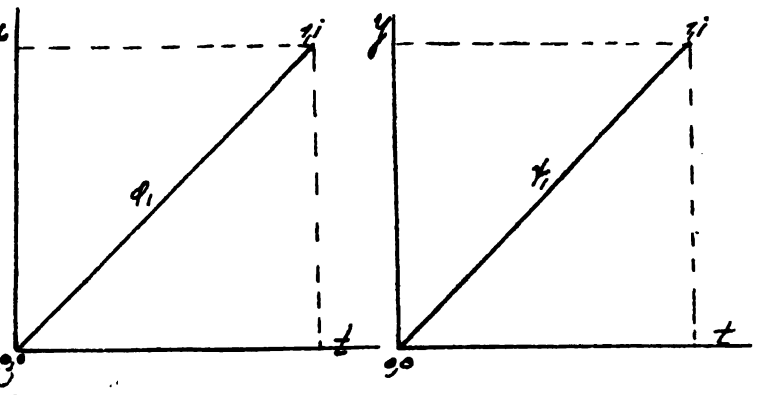
insofern dort diese Dinge etwas breiter mit verschie

nen Figuren entwickelt sind. Ich behandele nur einen einzelnen Fall.

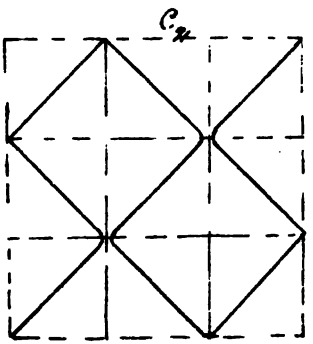
Ich gehe an die Koch-Curve in der Weise heran, daß ich mir eine gesetzmäßige Reihe von Curven $C_1, C_2, C_3 \ldots$ definiere, von denen ich schließlich das letzte Glied C_∞ meine.



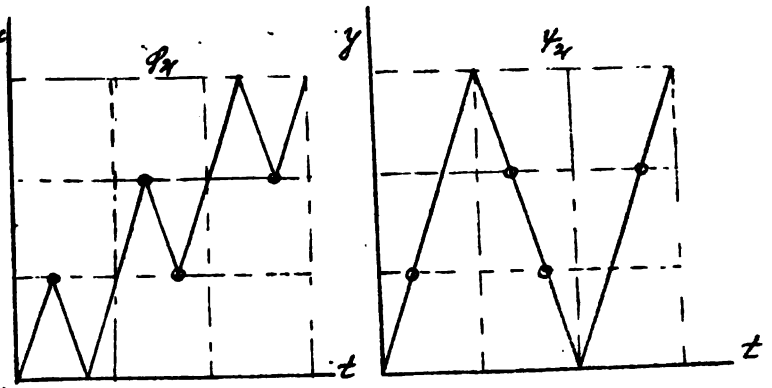
Wir zeichnen uns ein Quadrat von der Länge i und nehmen die Diagonale $\overline{0_0 1_1}$ als Curve C_1. Darunter zeichnen wir die xt und yt-Ebenen und definieren t als die Länge der Diagonale dividiert durch $\sqrt{2}$, so daß die Curven $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$ in den Ebenen xt, yt gerade Linien werden, welche unter 45° bez. durch 0 laufen (t läuft dabei von 0 bis i).



Jetzt kommt nun der entscheidende Schritt, der uns C_2 liefert.



Wir behalten den Anfangspunkt und Endpunkte der Diagonale bei, teilen das Quadrat in 9 kleinere Quadrate und führen statt der grossen Diagonale 9 kleinere ein, die in diesen neuen Quadraten liegen*/ und die so



aneinandergereiht sind, dass 2 Punkte im Innern des grossen Quadrats als Doppelpunkte der Gesamtcurve erscheinen. (Die Figur weist an diesen Stellen Abrundungen auf, damit sich die Aufeinanderfolge der einzelnen Teile der gemeinten Curve besser verfolgen lässt.) Die Länge der neuen Curve ist offenbar dreimal so lang wie C_n, also $3\sqrt{2}$. Definieren wir

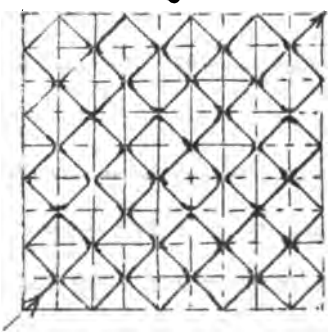
*/ Statt 9 könnten wir ebensowohl, ohne dass sich etwas Wesentliches änderte, das Quadrat einer unbegrenzten Zahl >3 nehmen.

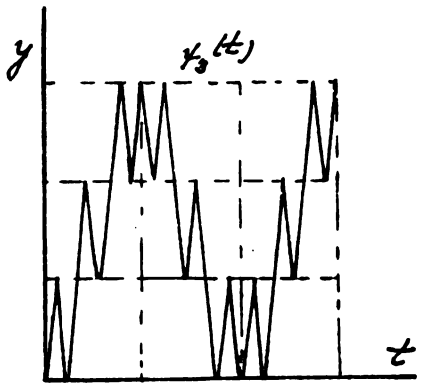
als Länge $/3\sqrt{2}$, so erhalten wir für $x = \varphi_2(t)$, $y = \psi_2(t)$ obenstehende Darstellungen (dabei läuft t wieder von 0 bis $i/$). Die Curve φ_2 entsteht dadurch aus ψ_2, daß man diese dreimal in verkleinertem Maßstabe diagonaliter aneinanderreiht.

Diesen Übergang von C_1 zu C_2 wiederholen wir nun stets in jedem unserer neuen kleineren Quadrate, bis ins Unendliche hin.

Zunächst die C_3.

Wie wir von C_1 zu C_2 durch Feinteilung des Quadrates übergingen, so gehen wir von C_2 zu C_3 durch weitere Feinteilung der einzelnen Quadrate und ersetzen jede bisherige Diagonale durch einen gebrochenen Linienzug, der die ursprüngliche Figur C_2 in verkleinertem Maßstabe darstellt.





Ähnlich verfahren wir, um C_4 herzustellen und so

fort bis C_∞.

Wollen wir nunmehr dem Früheren entsprechend $y = \psi_3(t)$ zeichnen, so teilen wir das Intervall $0 \leq t \leq i$ in q Teile und ebenso das Intervall $0 \leq y \leq i$ und erhalten dann eine Curve $\psi_3(t)$, die aus 4^q geradlinigen Stücken besteht, deren jedes selbst wieder aus 3 einzelnen Stückchen (Gliedern) zusammengesetzt ist, so daß sie im ganzen 3^q Glieder haben, entsprechend den 3^q Diagonalstücken der Cano-Curve.

Vergleichen wir übrigens ψ_3 mit φ_2, so können wir ψ_3 auch so schildern:

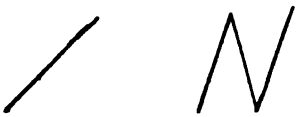
ψ_3 erwächst dadurch, daß man die Curve φ_2 seitlich auf $1/3$ zusammendrückt und die entstehende Figur, bezw. ihr Spiegelbild an einer vertikalen Geraden dreimal alternierend nebeneinander stellt.

Die Curve φ_3 erwächst nun wieder, indem man die eben gezeichnete Curve ψ_3, nachdem dieselbe in $1/3$ Maßstab gezeichnet ist, diagonaliter entsprechend dreimal aneinander reiht.

Man kann aber auch φ_3 aus φ_2 ableiten, wo es dann gleich für φ_n und ψ_n ausgesprochen heißt:

Um von φ_n zu φ_{n+1} (oder von ψ_n zu ψ_{n+1}) zu schreiten, da zerlege man erstlich jede geradlinige Seite von φ_n (oder ψ_n) in 3 gleich lange Glieder und er-

setze dann jedes geradlinige Glied durch einen 3-zackigen Haken, der denselben Anfangs- und Endpunkt hat.



Wenn man dies so weiterführt, so erinnert das ganze Fortschreitungsgesetz für die Curven φ_n und ψ_n an die Verhältnisse der Weierstraß'schen Curve nur daß statt der Sinusschwingungen hier geradlinig-zackige Schwingungen übereinandergelagert werden. Die Höhe dieser Zacken wird, je weiter wir mit dem Index gehen, immer unbedeutender, die Breite aber nimmt noch rascher ab, sodaß die Zacken ihrer Gestalt nach immer steiler und steiler werden.

Die Betrachtung dieser Bildungsgesetze zeigt insbesondere, daß die Curven $x = \varphi_n(t)$, $y = \psi_n(t)$ stetig sind und daß sie auch bei unendlich wachsendem n d.h. im Limes stetig bleiben.

Ich könnte nun versuchen, die Verhältnisse im Limes etwas genauer zu schildern.

Kennen wir Anfangs-, Endpunkt und die Stellen, in denen die verschiedenen Geraden aneinanderstoßen, Gelenkpunkte (sodaß ψ_3 82 und φ_3 244 Gelenkpunkte hat), so haben wir in diesen Gelenkpunkten ebensoviel Punkte, die den folgenden

Curven unverändert angehören. Schliesslich ist die Curve φ_∞ resp ψ_∞ überall dicht von solchen Gelenkpunkten besetzt, die den verschiedenen C_n (mit endlichem n) entstammen.

Wir bekommen also ein vollständiges Bild der betreffenden Curven φ_∞ und ψ_∞, indem wir uns für steigende Werte von n die jedesmaligen Gelenkpunkte der Curven φ_n, ψ_n konstruiert denken, die dann in ihrer Gesamtheit der Grenzcurve angehören und dieselbe, weil sie überall dicht aufeinanderfolgen, völlig festlegen.

Gehen wir nun auf die Kreis-Curve zurück, so entsprechen den Gelenkpunkten der Curven φ und ψ die Knickpunkte, in denen die Diagonalen sich unter rechtem Winkel aneinanderlegen und die im weiteren Verlauf der Curve (soweit es sich um Knickpunkte im Innern des Quadrates handelt) zu Doppelpunkten werden. Die bei einer C_n auftretenden Knickpunkte bleiben bei allen folgenden C ungeändert erhalten, nur dass immer zahlreichere werdende Knickpunkte dazwischen gesetzt werden. Schliesslich bedecken die Knickpunkte das Quadrat überall dicht, die Curve C_∞ füllt aber das Quadrat überhaupt aus, indem ihr jeder Punkt angehört, der

sich als Verdichtungsstelle der unendlich vielen Knickpunkte darstellt.

Soviel über die Peano-Curve. Es entsteht nunmehr folgende natürliche Fragestellung:

Die Peano-Curve ist doch nicht dem ähnlich, was man im gemeinen Leben eine Curve nennt. Wie muß ich daher die Definition $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einer Curve einengen, resp. welche Haupteigenschaften muß ich von einer so definierten Curve verlangen, damit wir eine Analogon zur empirischen Curve erhalten?

Dies hat in einfacher Weise C. Jordan in seinem Cours d'analyse beantwortet:

Unsere Peano-Curve hätte unendlich viele Knickpunkte und damit auch unendlich viele Doppelpunkte d.h. es lagen die Argumente t im Intervalle $0 \leq t \leq 1$, für welche ein Doppelpunkt eintrat, überall dicht. C. Jordan verlangt nun, daß die durch die Formeln $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definierte Curve im Intervall $a \leq t \leq b$ keinen Doppelpunkt besitzt d.h. daß keine zwei Werte t_1, t_2

$$a < t_1 < b \quad , \quad a < t_2 < b$$

existieren, so daß

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \qquad \psi(t_1) = \psi(t_2) \qquad \text{ist.}$$

Ausserdem nimmt er der Einfachheit halber an, dass $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$ sei, d.h. dass wir eine geschlossene Curve haben. Und von der so definierten „Curve" zeigt C. Jordan, dass sie die Ebene in 2 Teile (einen äusseren und einen inneren) teilt, wie wir dies von der empirischen Curve her gewöhnt sind.

Wir mögen noch so sagen:

Das Paradoxe bei der Peano-Curve liegt durchaus nicht in der Sache, sondern in der Ausdrucksweise, dass wir nämlich bei ihr das Wort „Curve" in einem allgemeineren Sinne gebrauchen, als zulässig ist, wenn wir die Analogie mit der empirischen Curve festhalten wollen.

Um den Gegensatz der Jordanschen Entwickelungen so klar wie möglich zu machen, will ich vorab nicht von einer Jordan-Curve, sondern einer Jordan'schen Punktmenge sprechen, von der wir dann zeigen, dass sie, was die Zusammenhangsverhältnisse betrifft, mit den gewöhnlichen Curven der empirischen Geometrie übereinstimmt.

In der That, sagt man kurzweg:

Jede durch $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ definierte Curve, die der Jordan'schen Bedingung genügt, trennt die Ebe-

ne einen äußeren und inneren Bereich,
so klingt das trivial. Der Grund hierfür liegt darin
daß man das Wort Curve hierbei unwillkürlich
in zweierlei Bedeutung auffaßt. Vielmehr sollte man
abstrahirender folgendermaßen sagen:

Ausgehend von dem empirischen Gebiete, wo es einfach klar ist, daß jede geschlossene Curve die Ebene in einen äußeren und inneren Bereich trennt, haben wir zu fragen:

Wie ist im Idealgebiete die Definition einer Punktmenge $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einzuschränken, damit wir einen analogen Satz erhalten?

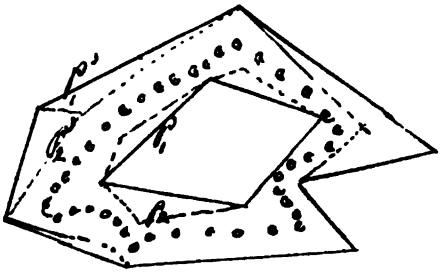
Und die Antwort ist:

Zu dem Zwecke sind $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ den Jordanschen Bedingungen zu unterwerfen.

Hinterher mag man dann eine solche Punktmenge eine Curve nennen!

Damit ist die Bedeutung des Satzes selber gegeben. Was den Beweis angeht, so referiere ich nur kurz die Hauptgesichtspunkte, da man die genau zu überlegenden Details besser am genannten Orte nachliest.

Wir denken uns eine Punktmenge gegeben $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, die den Jordan'schen Bedingungen entspricht. C. Jordan beginnt dann damit, eine Reihe einan-



der umschliessender geradliniger Polygone $P_1, P_2, P_3 \ldots$ (von stets wachsendem Flächeninhalt) zu konstruieren, welche im Innern keinen Punkt der Menge enthalten (wo also $P_1 < P_2 < P_3 \ldots$) und zweitens eine andere Reihe von Polygonen, in deren Äußern kein Punkt unserer Menge zu finden ist und wo für diese (unendlich ausgedehnten) äußeren Inhalte $P_1' < P_2' < P_3' \ldots$. Dass ein derartiges geradliniges Polygon die Ebene in 2 Bereiche teilt, wird nun aus der Elementargeometrie als bekannt angenommen.

Nachdem man diesen allgemeinen Gedanken hat, wird dann weiter gezeigt, daß jeder Punkt, der der Menge nicht angehört, in einen der Flächeninhalte P bezw. P' hineinkommt und daß schließlich die Punkte unserer Menge selbst als Grenzpunkte der immer sich nähernden Inhalte bezw. Polygone P und P' übrig bleiben.

Bei diesem Beweisgange bildet also die Anschauung von den empirischen Curven ein hodogetisches Princip. Jede einzelne Aussage ist aber logisch auf Axiome zu stützen, wobei sich als Kern der

moderne Zahlbegriff entspricht.

Das Resultat kann auch so gefasst werden: Für die Grenze der Polygonumfänge gilt was für die Polygonumfänge selbst gilt.

Man kann den Jordan'schen Satz mit dem zu Anfang der Vorlesung mitgeteilten Satz von Cauchy parallelisieren, dass eine stetige Funktion zwischen zwei Werten, die sie annimmt, auch alle Zwischenwerte annimmt. Genauso errichtet die Jordan-Curve zwischen ihrem Innern und Äussern eine lückenlose Schranke.

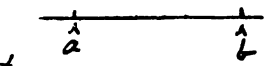
Aus dem Vorherigen ist klar, dass wir unsere Jordan'sche Punktmenge, was die Zusammenhangsverhältnisse betrifft, mit dem Namen Curve belegen können. Wird sie aber auch in anderen Beziehungen Analogien mit der gewöhnlichen Curve aufweisen?

Mit andern Worten:

Können wir bei der Jordan-Curve von Bogenlänge, Tangente, Krümmungsradius sprechen, oder welche Einschränkungen betreffend die φ, ψ müssen noch hinzukommen, damit dies möglich ist? (Natürlich müssen dann bei der Punktmenge der Rägisionsgeometrie statt der nur angenäherten Auffassung im empirischen Gebiet entsprechende

scharfe Definitionen zugrunde gelegt werden).

Wir gehen zunächst auf die Frage nach der Bogenlänge ein.

Wir teilen das Intervall $a \ldots b$ 

für t in beliebig kleine Teile $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \ldots$ und bekommen diesen Zuwächsen entsprechend bei x und y die Incremente $\Delta x, \Delta y$; $\Delta_2 x, \Delta_2 y; \ldots$ Diese Punkte einer Jordan'schen Menge verbinden wir geradlinig, sodass die Länge der aufeinanderfolgenden Stücke

$$\sqrt{\Delta_1 x^2 + \Delta_1 y^2} \quad ; \quad \sqrt{\Delta_2 x^2 + \Delta_2 y^2} \quad ; \quad \ldots$$

wird. Wir legen nun unserer Punktmenge eine Bogenlänge bei, wenn der Umfang des so konstruierten geradlinigen Polygons d.h.

$$\sum_{v} \sqrt{\Delta_v x^2 + \Delta_v y^2}$$

für den Fall, dass man das Intervall der t-Axe in immer zahlreichere und unbeschränkt kleiner werdende Teile zerlegt, einem bestimmten Limes zustrebt.

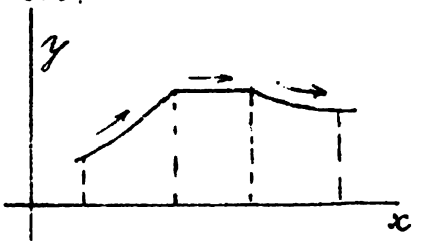
Dass dies ohne weiteres nicht nötig, sehen wir an dem Beispiele der Peano-Curve, bei der doch unsere Frage nach der Bogenlänge, nachdem wir einmal die Curve durch einen Parameter t dargestellt haben, durch die vorhandenen Doppelpunkte nicht alteriert wird.

Hier haben wir für C_1 die Länge $\sqrt{2}$, für C_2 $3\sqrt{2}$, $C_3 = 9\sqrt{2}$, ... und es ist sonach klar, daß der Umfang der successiven geradlinigen Polygone C_n, die je in die Gelenkpunkte unserer unendlichen Punktmenge eingespannt sind, mit wachsender Seitenzahl keineswegs einem endlichen Limes entgegengeht, sondern über alle Grenzen wächst.

Auch hier will ich die Beschränkungen (die wir den Funktionen φ und χ auferlegen müssen, damit der Jordan'schen Punktmenge eine Bogenlänge zukommt) ohne Beweis angeben, indem ich nur auf den springenden Punkt aufmerksam mache.

Ich führe zunächst zwei Benennungen ein, die von den Mathematikern nicht gerade glücklich gewählt sind, weil sie im gewöhnlichen Leben gewisse Nebenbedeutungen besitzen, die aber je länger je mehr in allgemeinen Gebrauch kommen.

Zunächst sagt C. Neumann von einer Funktion, sie wachse in einem Intervall monoton, wenn sie in dem betreffenden Intervall in keinem noch so kleinen Stücke constant ist oder abnimmt.



Des Weiteren spricht C. Jordan von einer konvexen

ten Funktion:

Im Allgemeinen kann eine Funktion in einem Intervall unendlich oft zu- und abnehmen. Eine Funktion heißt nun konvex, wenn die Summe der positiven Zuwächse für sich und auch die Summe der negativen Zuwächse für sich genommen endlich ist.

Wir fragen wieder: Ist uns ein Beispiel einer nicht-konvexen Curve bekannt?

Ich erinnere an die beiden Funktionen φ und ψ, die wir bei dem Beispiele der Peano-Curve als Grenzen geradliniger gezackter Curvenzüge konstruierten. Hier ist sofort geometrisch ersichtlich, daß die Summe der aufsteigenden, wie absteigenden Äste für sich unendlich ist.

Was nun die Bogenlänge einer Jordan-Curve betrifft, so beweist C. Jordan, daß eine solche im Sinne unserer Definition herauskommt dann und nur dann, wenn φ und ψ konvexe Funktionen sind.

Fragen wir weiter, wann die Jordan-Curve eine Tangente bezw. Krümmung besitzt, so können wir jedenfalls eine hinreichende Bedingung angeben:

Damit nämlich unsere Punktmenge an jeder Stelle eine Tangente und Krümmung besitzt, ist jedenfalls ausreichend, dass φ und ψ bezgs. einmal oder zweimal im Intervalle differentiierbar sind.[1]

Wenn alle unsere genannten Einschränkungen:

1) φ und ψ im Intervalle stetig,
2) ohne Doppelpunkte,
3) φ und ψ beschränkt,
4) ν-mal differentiierbar,

für unsere Punktmenge erfüllt sind, dann wollen wir sie in Hinsicht auf die analogen Eigenschaften bei der empirischen Curve kurzweg als Curve bezeichnen. Soll aber der Gegensatz zu der Peano'Curve und ähnlichen Gebilden betont werden, so werden wir von ihr als einer regulären Curve sprechen. Oder noch präciser:

Wir nennen die so definierte Punktmenge zunächst ein reguläres Curvenstück, wo dann eine reguläre Curve aus endlich vielen solcher Stücke zusammengesetzt sein und damit dann auch wieder Doppelpunkte (in endlicher Zahl) besitzen kann.

---

[1] Es ist dies nicht notwendig, weil ich eventuell einen Parameter t, für den dies der Fall ist, durch einen andern Parameter $t_1 = f(t)$ ersetzen kann, für den es nicht stimmt. Ich habe nur $f(t)$ als [illegible] monoton wachsende, stetige, aber nicht differentiierbare Funktion einzuführen.

Ich füge noch hinzu, dass man auch vielfach ein reguläres Curvenstück als ein solches bezeichnet, das jedenfalls eine Tangente besitzt und die Eigenschaft, dass die Tangente beim Fortschreiten entlang der Curve sich monoton dreht (in dem einen oder anderem Sinne), (was noch nicht soviel verlangt, wie das Vorhandensein eines Krümmungsradius. Wir werden überhaupt unserer Definition der regulären Curve eine gewisse Elasticität lassen, indem wir unsere Anforderungen an die Zahl der existierenden Differentialquotienten von φ, χ bezw. die Monotonie der höchsten existierenden Differentialquotienten jeweils den Verhältnissen anpassen).

Im Übrigen erinnere ich an die entsprechenden Entwicklungen des ersten Teils dieser Vorlesung, die sich nur dadurch unterscheiden, dass wir uns auf Punktmengen beschränkten, die sich in der Form $y = f(x)$ darstellen liessen. Wenn wir nach der jetzt gewählten Ausdrucksweise eine reguläre Curve haben, so sprachen wir damals entsprechend von einer „vernünftigen" Funktion.

Wir fragen weitergehend:

Welche Beziehung besteht zwischen der nunmehr

definierten Gebilden der Präzisionsmathematik und dem, was wir im empirischen Gebiet kurzweg „Curve" nennen?

Um hier Undeutlichkeiten in der Sprechweise zu vermeiden, die dadurch hervorkommen, daß wir beidemal dasselbe Wort Curve gebrauchen, und um andererseits mich kurz auszudrücken, will ich fortan in der Präzisionsmathematik von der Idealcurve, der wir gegebenenfalls das Attribut „regulär" geben, im empirischen Gebiete von der empirischen Curve reden.

Ich behaupte:

Man wird zu einer empirischen Curve allemal eine reguläre Idealcurve sich hinzu denken können, die mit ihr in allen wesentlichen Attributen, die wir oben bei den Curven $y = f(x)$ zur Sprache brachten, übereinkommt, nämlich soweit übereinstimmt, als dies überhaupt wegen der beschränkten Genauigkeit der empirischen Verhältnisse möglich ist.

Den Beweis denke ich mir in der Weise geführt, daß ich annehme, es sei möglich, die empirische Curve in eine endliche Anzahl solcher Stücke zu zerlegen, welche, je auf ein geeignetes Coordinatensystem bezogen, durch eine Formel $y = f(x)$ – auch was Richtung und ev. Krümmung angeht –, mit

hinreichender Annäherung dargestellt werden können (vergl. die Auseinandersetzungen auf pg 103ff. Wir haben also eine endliche Zahl von Coordinatensystemen

$$x_1 y_1 , \; x_2 y_2 , \; \ldots\ldots \; x_n y_n$$

und in jedem derselben ein reguläres Stück einer Jordancurve:

$$y_1 = f_1(x_1) , \; y_2 = f_2(x_2) , \; \ldots\ldots \; y_n = f_n(x_n) ;$$

diese Stücke schliessen sich (vermöge der gegenseitigen Lage der Coordinatensysteme) mit Endpunkt und Anfangspunkt aneinander, sodass ein zusammenhängendes Ganze vorliegt. Wir führen jetzt ein einheitliches Coordinatensystem XY und einen Parameter t ein, dessen in Betracht kommendes Intervall wir in n Teilintervalle gelegen. Liegt t im ersten Teilintervall, so nennen wir es t_1, liegt es im zweiten, t_2 u. s. w. fort. Die Kunst ist dann, die n Formeln:

$$y_1 = f_1(x_1) , \; y_2 = f_2(x_2) \; \ldots\ldots \; y_n = f_n(x_n)$$

zu einem einzigen Formelpaar

$$x = \varphi(t) , \; y = \psi(t)$$

derart zu verschmelzen, dass für $t = t_1$ das Stück $y_1 = f_1(x_1)$, für $t = t_2$ das Stück $y_2 = f_2(x_2)$, $\ldots\ldots$ dargestellt wird. Und gleichzeitig sollen φ, ψ in

diesen Teilintervallen ebenso oft nach t differentierbar sein, wie beziehungsweise f_1 nach x_1, f_2 nach x_2, ... Dies aber wird sich in einfachster Weise durchführen lassen, wenn wir

$$t_1 = \alpha_1 x_1 + \beta \ , \quad t_2 = \alpha_2 x_2 + \beta_2 \ , \ \ldots \ -$$

setzen und die Constanten α, β hier so bestimmen, daß der Endwert von t_1 (der dem größten Wert von x_1 entspricht) mit dem Anfangswert von t_2 (der dem kleinsten Wert von x_2 entspricht) zusammenfällt, ebenso der Endwert von t_2 mit dem Anfangswert von t_3 u.s.w. —

Die hiermit skizzierte Entwickelung läßt die Möglichkeit offen, daß die verschiedenen Idealcurvenstücke $y_1 = f_1(x_1)$, $y_2 = f_2(x_2)$, ..., die wir aneinander reihten, in ihren gemeinsamen Punkten verschiedene Richtungen, bezw. Krümmungen darbieten. Dem entsprechend wird die vorgelegte empirische Curve singuläre Punkte (d.h. Punkte, in denen sich ihre „empirische" Richtung oder Krümmung sprungweise ändert), in endlicher Zahl besitzen dürfen. Die resultierende Idealcurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist dann natürlich mit den entsprechenden Singularitäten behaftet.

Wir mögen den vorstehenden Überlegungen noch

ihre Umkehr hinzufügen, indem wir fragen: welche Eigenschaften der regulären Idealcurven $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ kommen für das empirische Gebiet in Betracht?

Ersichtlich alle diejenigen, die erhalten bleiben, wenn wir die φ, ψ innerhalb solcher Grenzen, die im einzelnen Falle vorgegeben sind, beliebig abändern, d.h. diejenigen Eigenschaften, von denen die Approximationsmathematik handelt. Man kann diese Aussage dadurch in eine anschauliche Form bringen, daß wir uns um jeden Punkt der Curve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ mit einem vorgegebenen kleinen Radius ϱ einen Kreis beschrieben denken. Die Gesamtheit der solcherweise entstehenden Kreisflächen wird einen bestimmten Streifen der Ebene überdecken und es sind die gestaltlichen Eigenschaften des so definierten Streifen, nicht diejenigen der Idealcurven selbst, welche im empirischen Gebiet zur Geltung kommen.

Hier ist nun auch der Ort um, gestützt auf die Kenntnisse, die wir inzwischen erworben haben, auf die Frage nach der Genauigkeit unserer Raumvorstellung (die wir gleich zu Anfang dieser Vorlesung berührt haben) zurückzukommen.

Sei bezüglich eines Coordinatensystems x, y einerseits ein Kreis, andererseits eine Peano-Curve durch die zugehörigen Formeln $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ definiert. Besteht hinsichtlich unserer Fähigkeit, uns die so definierten Gebilde räumlich vorzustellen, in den beiden Fällen ein principieller Unterschied? Ich glaube es nicht. Beidemal können wir uns durch Fixierung der Aufmerksamkeit auf einzelne Werte von t die Lage einzelner Punkte der in Betracht kommenden Gebilde in Gedanken, aber immer nur mit beschränkter Genauigkeit, festlegen; wir können uns auch, indem wir uns solcherweise benachbarte Punkte fixiert denken, mit beschränkter Genauigkeit die Richtung der Verbindungslinie vorstellen; aber an das Idealgebilde selbst kommen wir weder das eine Mal noch das andere Mal mit unserer Vorstellungskraft heran. Die mathematischen Überlegungen, durch die wir das Idealgebilde beherrschen, werden durch die Raumanschauung belebt und dirigiert, aber sie stützen sich in letzter Linie auf die durch die Formel $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ gegebene Gesetzmäßigkeit unter Zugrundelegung der (ebenfalls über die unmittelbare Vorstellungskraft hinausgehenden) Axiome.

Dies ist meine Theorie von 1873. Ich möchte wünschen, daß sich Physiologen und Psychologen dazu äußerten. Vorbedingung müßte nur sein, daß die Herren die modernen Entwickelungen der Präcisionsmathematik, etwa soweit, wie sie in dieser Vorlesung zur Sprache kommen, durchgedacht und sich zu eigen gemacht haben. So lange man nicht einzelne Beispiele von Idealcurven ohne Differentialquotienten, wie die Weierstraß-Curve oder die Cesaro-Curve, eingehend überlegt hat, ist es mißlich, über den Unterschied dieser Idealcurven von den gewöhnlich allein betrachteten Idealcurven mit Differentialquotienten in eine philosophische Discussion einzutreten. –

Wir wenden uns nunmehr zu einer kurzen Besprechung der <u>hauptsächlichsten Arten von Idealcurven</u>, welche die präcisionsmathematische Behandlung bevorzugt.

<u>1) Wann nennen wir eine reguläre Idealcurve analytisch</u> d.h. welche einschränkende Bedingungen müssen zur Definition der regulären Idealcurve hinzutreten, damit wir sie analytisch nennen? (Eine reguläre analytische Idealcurve bezeichne ich weiterhin kurzweg als analytische Curve!)

Wir werden sagen:

Eine reguläre Idealcurve heißt analytisch, wenn x und y durch convergente Potenzreihen von t darstellbar sind.

Und weshalb beschäftigen sich die Mathematiker fast ausschließlich mit den analytischen Curven, nachdem sie doch längst wissen, daß damit bei weitem nicht alle Curven erschöpft sind?

Der Grund liegt in den schönen Eigenschaften, die die analytischen Curven besitzen: Zunächst sind sie auf complexes $t = u + iv$ verallgemeinerungsfähig. Es kommt hier also die ganze Funktionentheorie (complexer Veränderlicher) heran (die Potenzreihen convergieren gleich in einem Bereiche der uv-Ebene). Insbesondere gestattet die analytische Fortsetzung, zu neuen Definitionsgebieten fortzuschreiten, also, soweit diese Gebiete reelle Werte von t mit umfassen, zu neuen Curvenstücken gesetzmäßig fortzuschreiten.

Abschließend sage ich:

Eine analytische Curve ist der Inbegriff aller der analytischen Fortsetzungen, die sich an das erste Stück nach den Regeln der Funktionentheorie (eines complexen Argumentes) ergeben, sie stellt sich als ein gesetzmäßiges Ganze dar, welches durch sein kleinstes Stück vollständig bestimmt ist. Und die hier

mit bezeichnete Gesetzmäßigkeit: — daß das kleinste Stück das Ganze bestimmt —, ist es, welche die analytische Curve zum Lieblingsgegenstande der Mathematiker macht.

Der Bestimmtheit halber füge ich noch hinzu:

Eine analytische Curve kann auch singuläre Punkte der verschiedensten Art haben; man erhält dieselben, wenn man annimmt, daß in den Reihenentwickelungen für φ und ψ

$$x = \varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$y = \psi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

Reihen von Gliedern niederster Ordnung fortfallen und man die Verhältnisse bei $t = 0$ betrachtet.

2/ Wir gehen nun weiter in der Einschränkung des Curvenbegriffs, indem wir von den analytischen Curven zu den algebraischen fortschreiten.

In dem Wortlaut liegt schon drin, daß eine analytische Curve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ algebraisch heißt, wenn φ und ψ identisch eine algebraische Gleichung $F(\varphi, \psi) = 0$ befriedigen.

Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

„Wenn eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ vorgelegt ist, dann kann man für die Umgebung jeder Stelle x_0, y_0 eine Hülfsvariable t so einführen, daß

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ wird, wo φ und ψ convergente, nach ganzen Potenzen fortschreitende Reihenentwickelungen sind."

Ich beweise dies nicht, sondern führe den Satz nur in möglichst bestimmter Fassung an, indem es sich für mich ja hier nur darum handelt, einen allgemeinen Überblick über die Sache zu geben.

Die weitere Frage ist nun:

Läßt sich außer dieser formalen Definition der algebraischen Curve eine mehr sachliche Definition geben d. h. eine Definition, die sich anschaulich fassen läßt?

Dies gelingt in der That sowohl funktionentheoretisch, wie auch geometrisch.

Zunächst funktionentheoretisch: Wir stellen uns durch Elimination von t die Funktion $y = f(x)$ her und die Frage ist, ob die algebraische Funktion $y = f(x)$ hinsichtlich der zu den einzelnen Werten von x gehörigen Potenzentwickelungen besonders charakteristische Eigenschaften besitzt, die die algebraische Funktion von anderen analytischen Funktionen unterscheiden. Dabei müssen wir natürlich x als complexe Veränderliche fassen, da nur dann die Aussagen der Funktionentheorie ihr genuines Substrat finden

In der That läßt sich nun y funktionentheoretisch als algebraische Funktion von x dadurch definiren, daß man verlangt: a) es solle für den einzelnen Wert von x nur eine endliche Anzahl von Werten y vorhanden sein und b) es solle sich y nach Potenzen von $(x-x_0)$ in der Umgebung jeder Stelle x_0 so entwickeln lassen, daß dabei keine unendliche Zahl negativer Potenzen auftritt (so daß sogenannte wesentliche Singularitäten ausgeschlossen sind). Die genaue Vorlesung gehört natürlich in eine Vorlesung über Funktionentheorie.

Interessanter und leichter verständlich als diese funktionentheoretische Digression ist der Anschluß an die geometrische Auffassungsweise.

Auf die Frage nach den geometrisch charakteristischen Eigenschaften der algebraischen Curve hat bereits vor 50 Jahren Grassmann die entscheidende Antwort gegeben. Leider ist seine Auffassung auch heute noch nicht in die Lehrbücher übergegangen.

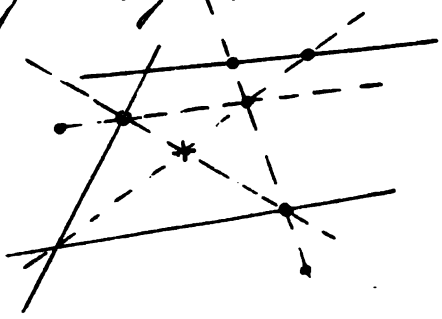
Ich gebe gleich Grassmann's Satz, indem ich dabei das Wort: „linealer Mechanismus" benutze:

Eine Curve heißt algebraisch, wenn sie durch einen linealen Mechanismus erzeugt werden kann.

Zunächst was heißt linealer Mechanismus?

Ein linealer Mechanismus ist ein bewegliches System von geraden Linien (von denen nur die Eigenschaft geradlinig zu sein, benutzt wird, also nicht die Eigenschaft, die eine materielle Gerade gleichfalls hat, als Streckenabträger dienen zu können) und Punkten, wobei die geraden Linien gezwungen sind, durch bestimmte Punkte zu gehen, und die Punkte gezwungen sind, auf bestimmten Geraden sich zu bewegen.

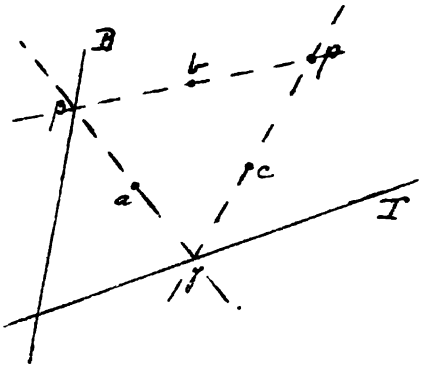
Denken Sie sich eine Anzahl von Geraden und Punkten gegeben, es sollen dann aus diesen Elementen nur durch Ziehen von Verbindungsgeraden und Schneiden der nunmehr vorhandenen Geraden neue Gerade und Punkte abgeleitet werden! Wir werden uns daraufhin so ausdrücken können:



Unter einer linealen Construktion nach Grassmann versteht man die Ableitung von neuen Punkten und Geraden aus den gegebenen nur mit Hülfe des Lineals. Zum linealen Mechanismus wird die lineale Construktion, wenn sie sich schließt, d.h. zum Anfangselement zurückführt.

Ich erläutere etwa, wie die Kegelschnitte durch einen

linealen Mechanismus gewonnen werden können.



Wir geben 3 Punkte a, b, c und 2 Geraden B, I. Es wird dann ein Kegelschnitt erzeugt, wenn man verlangt, daß die Punkte β und γ, die in der Figur aus dem Punkte p lineal (durch Ziehen von $\overline{bp}$ und $\overline{cp}$) abgeleitet sind, mit dem gegebenen Punkte a auf einer geraden Linie liegen (Maclaurin's Erzeugung).

Man wird sich geradezu aus starren Drähten, am besten Stricknadeln, einen Apparat gebaut denken, so daß der Punkt p fortgesetzt der geschilderten linealen Bedingung genügt, also sich auf einem Kegelschnitt bewegt. Das ist dann ein linealer Mechanismus. Überhaupt aber wird man einen linealen Mechanismus ein solches bewegliches Aggregat von geraden Linien und Schnittpunkten derselben nennen welches zur Folge hat, daß 3 von dem Punkte p abhängige Punkte auf einer Geraden liegen, oder auch 3 von dem Punkte p abhängige Geraden durch einen Punkt gehen.

Die linealen Mechanismen haben übrigens nur theoretisches, kein praktisches Interesse, weil die

Ausführung nicht genau gemacht werden kann, vielmehr der Apparat, den man construieren mag, schlottert (vgl. die Bemerkungen zum Pascal'schen Lechsect in der Vorlesung über projektive Geometrie W. S. 1900/01)[1]. —

Dieser Idee des linealen Mechanismus hat sich nun Grassmann bedient, um eine algebraische Curve allgemein zu definieren.

Bei der Kegelschnittserzeugung, wo es sich also um die Erzeugung einer algebraischen Curve 2ter Ordnung handelt, wird der Punkt p zweimal benutzt. Grassmann findet, dass er eine algebraische Curve nter Ordnung bekommt, wenn er den Mechanismus so einrichtet, dass der Punkt p n-mal benutzt wird.

Hier ist er aber nicht stehen geblieben, sondern er zeigt auch umgekehrt, dass man jede algebraische Gleichung nter Ordnung $F(x,y) = 0$ durch einen (ev. sehr complicierten) linealen Mechanismus ersetzen kann, bei welchem also der Punkt xy n-mal vorkommt. Er macht das so, dass er geradezu die Gleichung $F(x,y) = 0$ in die Vorschrift für die Bauart eines solchen Mechanismus umsetzt.

Nachdem wir diesen Satz haben, folgt unmittelbar die bereits oben gegebene, rein geometrische De-

[1] Nicht autographiert.

finition der algebraischen Curven nach Grassmann.

Eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung ist eine solche Curve, welche durch einen linealen Mechanismus n^{ter} Ordnung erzeugt wird. —

Wieder fragen wir, wo das <u>besondere Interesse der algebraischen Curven</u> liegt.

Natürlich gilt auch für sie (wie für die analytischen Curven überhaupt), dass sie in ihrer ganzen Ausdehnung durch das Verhalten auf einem noch so kleinen Stück festgelegt sind. Darüber hinaus haben sie aber noch weitere <u>einfache Eigenschaften</u>, die sich auf ihren Gesamtverlauf beziehen. Von nur das Richtige anzuführen:

Sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Ästen und es gilt für sie das <u>Bézout'sche Theorem</u>, d.h. eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung wird von einer Geraden in n Punkten geschnitten und zwei verschiedene algebraische Curven C_m und C_n schneiden sich in $m.n$ Punkten (vorausgesetzt dass man richtig zählt d.h. die imaginären Schnittpunkte, eventuelle Punkte im Unendlichen und jeden einzelnen mit der richtigen Multiplicität in Rechnung bringt, und dass man von den Fällen absieht, wo die Curven ganze Äste gemein haben).

Insbesondere ergeben sich nun auf Grund dieser allgemeinen Sätze, besonders für die Curven niederer Ordnung 1, 2, 3 und 4, wunderschöne Theoreme, welche eine Beschäftigung mit diesen Curven zu einem reizvollen Vergnügen machen und geradezu eine ästhetische Befriedigung in sich schließen.

Infolgedessen ist ja die Beschäftigung mit den algebraischen Curven zum Lieblingsgegenstand des mathematischen Studiums geworden. Aber man muß es doch als Einseitigkeit bezeichnen, wenn nur von algebraischen Curven die Rede ist, wie in so manchen Lehrbüchern. Man gewinnt dort geradezu den Eindruck, als ob es nur diese gäbe, während doch die Sinuslinie, Schraubenlinie noch viel öfter auftretende, mindestens eben so schöne, aber keine algebraischen Curven sind.

Noch spezieller als die algebraischen Curven sind die rationalen Curven. Hier geht man wieder von $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ aus, indem man annimmt, daß φ und χ rational in t sind. Auch mit ihnen sich zu beschäftigen, hat man vielfach Anlaß gehabt.

Nachdem wir so die Spezialisierung verfolgt haben, die der Curvenbegriff im Gebiete der Rationalmathematik findet, fragen wir unserer allgemeinen

Fragestellung getreu:

Was haben die verschiedenen Idealcurven mit den Anwendungen zu thun?

Der alte Satz sot, dass in den Anwendungen nur analytische Curven vorkommen. Wir stellen dem entgegen, dass in den Anwendungen überhaupt keine Idealcurven, sondern nur Annäherungen an solche (d.h. Streifen) zur Geltung kommen. Ferner aber, wenn man eine Idealcurve heranziehen will, um eine empirische Curve resp. Erscheinung nach ihrer scheinbaren Continuität zu schildern, dann reicht man, sagen wir, immer mit regulären Curven (d.h. den Curven, bei denen φ und ψ endlich oft differentiierbar sind und die letzten Differentialquotienten vielleicht noch abtheilungsweise monoton sind) aus und es ist Metaphysik, wenn man statt derselben glaubt analytische Curven heranziehen zu müssen. Ich nenne hier Metaphysik, was jenseits der unmittelbaren Erfahrung liegt, was man einführt, weil man sich obere Grundsätze macht, vermöge deren es wünschenswert erscheint, nur analytische Curven zu benutzen.

Übrigens wird die somit aufgestellte Behauptung, dass analytische, algebraische, rationale Cur-

ven als solche nichts mit den Anwendungen zu thun haben, durch den Umstand etwas abgeändert, dass die einfachsten regulären Curven, die man kennt, thatsächlich analytisch sind.

Hat man z. B. den Ansatz:

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2,$$

(den man der Einfachheit halber allemal heranzieht, wenn man im empirischen Gebiete ein einzelnes Curvenstück darzustellen hat), so haben wir zufällig eine rationale Curve getroffen. Ebenso wird man in den Anwendungen die auf die Formeln $y = \sin x$, $y = e^x$, ... verzichten wollen, auch wenn noch Correktionen eintreten, die den analytischen Charakter der Curve verwischen. Wir können also der obigen Behauptung folgendes Corollar folgen lassen:

Analytische, algebraische, rationale Curven treten nur insofern im empirischen Gebiet auf, als in der That die einfachsten regulären Curven, die man kennt und die man zur approximativen Darstellung empirischer Daten immerzu heranzieht, analytische, algebraische, rationale Curven sind.

Ich möchte hier einige Worte über das Buch:

J. Perry: The calculus for engineers, London 1897 einfügen, in welchem der Gedanke, den ich hier berühre, charakteristisch zur Geltung kommt.

Das Buch ist dadurch ausgezeichnet, dass der Verfasser, der für Praktiker schreibt, sich vollkommen auf den Standpunkt des Praktikers stellt. Er spricht nicht von dem allgemeinen Curvenbegriff u.s.w., sondern bemerkt gleich damit, dass in der Praxis eigentlich nur 3 fundamentale Funktionen ($y = x^n$, $y = e^x$, $y = \sin x$) in Betracht kommen und dass man alle Aufgaben der gewöhnlichen Praxis mit genügender Genauigkeit lösen kann, wenn man nur noch solche Funktionen zulässt, welche aus den gegebenen drei durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der 4 Species herauskommen, z. B.

$$y = \frac{a+bx+cx^2}{d+ex+fx^2}, \quad \text{u.s.w.}$$

Diese Auffassung von Perry ist vielfach als unwissenschaftlich bezeichnet worden. Dies ist sie aber auf ihrem Gebiete gar nicht. Es ist gerade der Zweck der gegenwärtigen Vorlesung den Standpunkt so zu wählen, dass auch Perry's Ideen in dem Gebäude, das gleichzeitig das ideale und empirische Gebiet umschliesst, Platz finden.

II, 2 Fortsetzung der präzisionsmathematischen Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Ich nehme nunmehr einen Gedanken auf, den wir schon früher einmal berührt haben (wo-mit ich mich wieder ganz dem idealen Gebiete zu-wende.

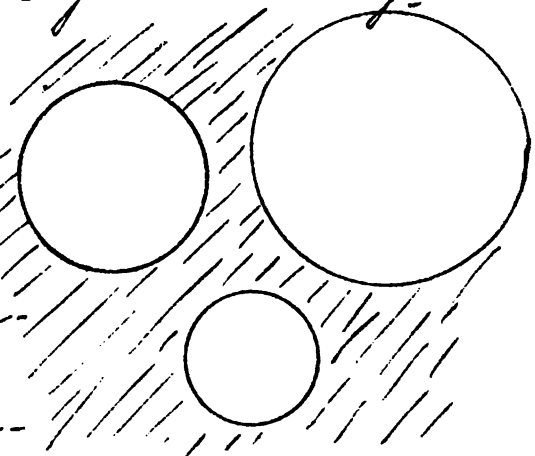
Wir haben unsere ganze Entwickelung an die Ideenbildungen der analytischen Geometrie angeknüpft, und also im letzten Grunde alles auf den modernen Zahlbegriff gestützt. Will man die bisher besprochenen Dinge von dieser Darstellungsweise ablösen und auf rein geometrischer Basis behandeln (was durchaus möglich ist), so wird man ein Axiom an die Spitze stellen müssen, das der Einführung des modernen Zahlbegriffs entspricht und so gefaßt werden kann, daß ein unbegrenzt kleiner werdendes Stück der Ebene oder auch einer ebenen Idealcurve in der Grenze einen bestimmten Punkt definiert.[1]

Diese Bemerkung mögen Sie als theoretische Grundlage dessen wählen, was ich jetzt ausführe.

Wir sahen schon früher, daß man in der Theorie der automorphen Funktionen dazu geführt wird, Punktgruppen zu definieren und zu studieren, die alle die merkwürdigen Eigenschaften besitzen,

[1] Die Beschränkung auf ebene Geometrie wird hier selbstverständlich nur aus Gründen der Raumökonomie festgehalten.

welche die Mengentheoretiker zu betrachten pflegen. Jetzt will ich durch eine kleine Modifikation desselben geometrischen Erzeugungsprinzipes zu nicht analytischen Curven fortschreiten (die hier also rein geometrisch erzeugt werden, wodurch zugleich der Eindruck vermieden wird, als ob durch die Betrachtung nicht-analytischer Curven etwas Künstliches und ihr Fremdes in die Geometrie hineingetragen würde).



Wir gingen bei unsern früheren Betrachtungen von 3 oder mehreren Kreisen in der Ebene aus, die ganz auseinander liegen, und invertierten den von ihnen gemeinsam begrenzten Fundamentalbereich und alle aus ihm durch Inversion entstehenden äquivalenten Bereiche an den Kreisen immer wieder aufs Neue. Wir erhielten so eine „Menge" von Häufungsstellen der Bereiche[1], wo dann die Frage entstand: Was läßt sich von dieser Menge Bestimmtes aussagen? Wir fanden u.a.,

---

[1] Indem wir uns so ausdrücken, benutzen wir bereits das den bezeichnete Axiom, daß nämlich ein unbegrenzt kleiner werdender Bereich einen Punkt definiert!

daß sie nirgendwo dicht war, aber trotzdem die Mächtigkeit des Continuums besaß.

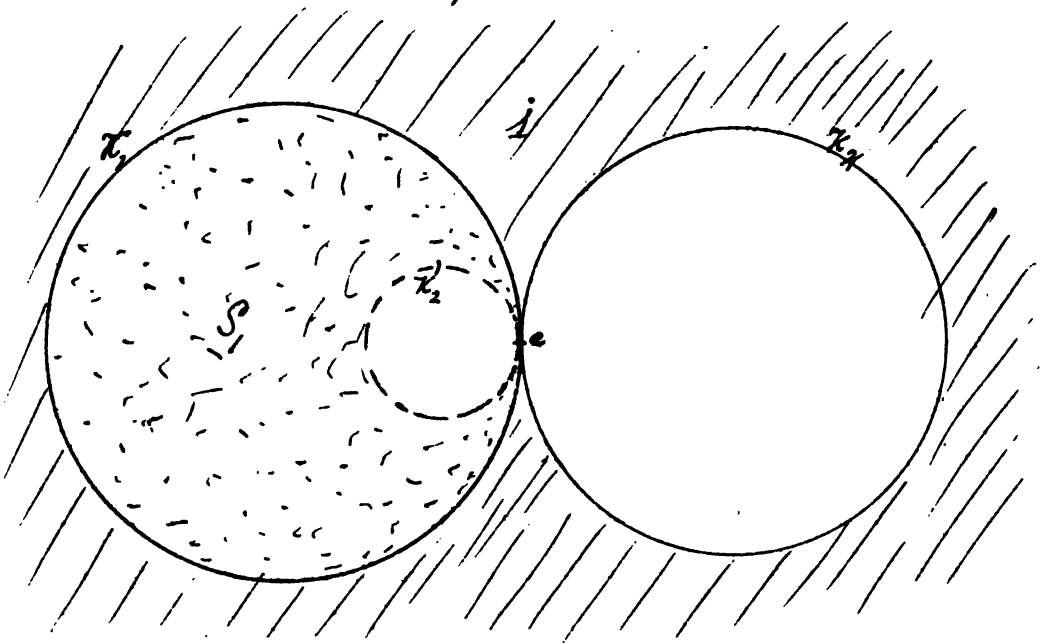
Wir bringen hier nunmehr die Modification an, daß wir die Kreise sich in cyklischer Reihenfolge berühren lassen. Dadurch wird der Ausgangsbereich (allgemein zu reden) in 2 Kreisbogen-n-ecke zerlegt, von denen jedes lauter Winkel gleich Null aufweist. Man vergleiche die Figur, bei welcher der eine Bereich durch das Unendliche geht, was aber nicht besonders ins Gewicht fällt, da eine Inversion ihn sofort in einen endlichen verwandelt. Wir wenden nun auf diese beiden Hälften des früheren Ausgangsbereiches die Inversion an den Begrenzungskreisen immer wiederholt an und fragen nach der Menge resp. dem Verhalten der dabei entstehenden Grenzpunkte. Wir werden finden, daß die Grenzpunkte eine Jordan-Curve (d.h. eine Curve im Sinne des oben besprochenen Jordan'schen

Satzes) bilden, die im allgemeinen nicht analytisch ist (wobei ich das Wort „im allgemeinen" im Verlaufe der Discussion noch erklären werde).

Auch hier hebe ich wieder hervor, daß die Idee, an einer Anzahl von Ausgangskreisen fortgesetzt den Fundamentalbereich und seine äquivalenten zu spielen, aus der Physik stammt, wo man in der Elektrostatik veranlaßt wird, bei der Gleichgewichtsverteilung auf einander berührenden Rotationscylindern genau dieselben unendlich vielen Inversionen zu betrachten, von denen wir hier handeln. Es folgt also, daß man den nicht-analytischen Curven nicht entgehen kann, wenn man nur die Betrachtungen, mit denen sich die Praktiker ohnehin beschäftigen, hinreichend weit fortsetzt.

Es seien 2 sich berührende Kreise gegeben; wir haben hier nur einen Ausgangsbereich, der sich als Kreisbogenzweieck mit 2 Winkeln Null darbietet; derselbe ist in der Figur (pg. 249), wie früher mit 1 bezeichnet.

Invertieren wir den Bereich 1 an K_1, so erhalten wir einen von K_1 umschlossenen sichelförmigen Bereich, den wir (wie auch die in Rede stehende Inversion selbst) mit S_1 bezeichnen; ebenso



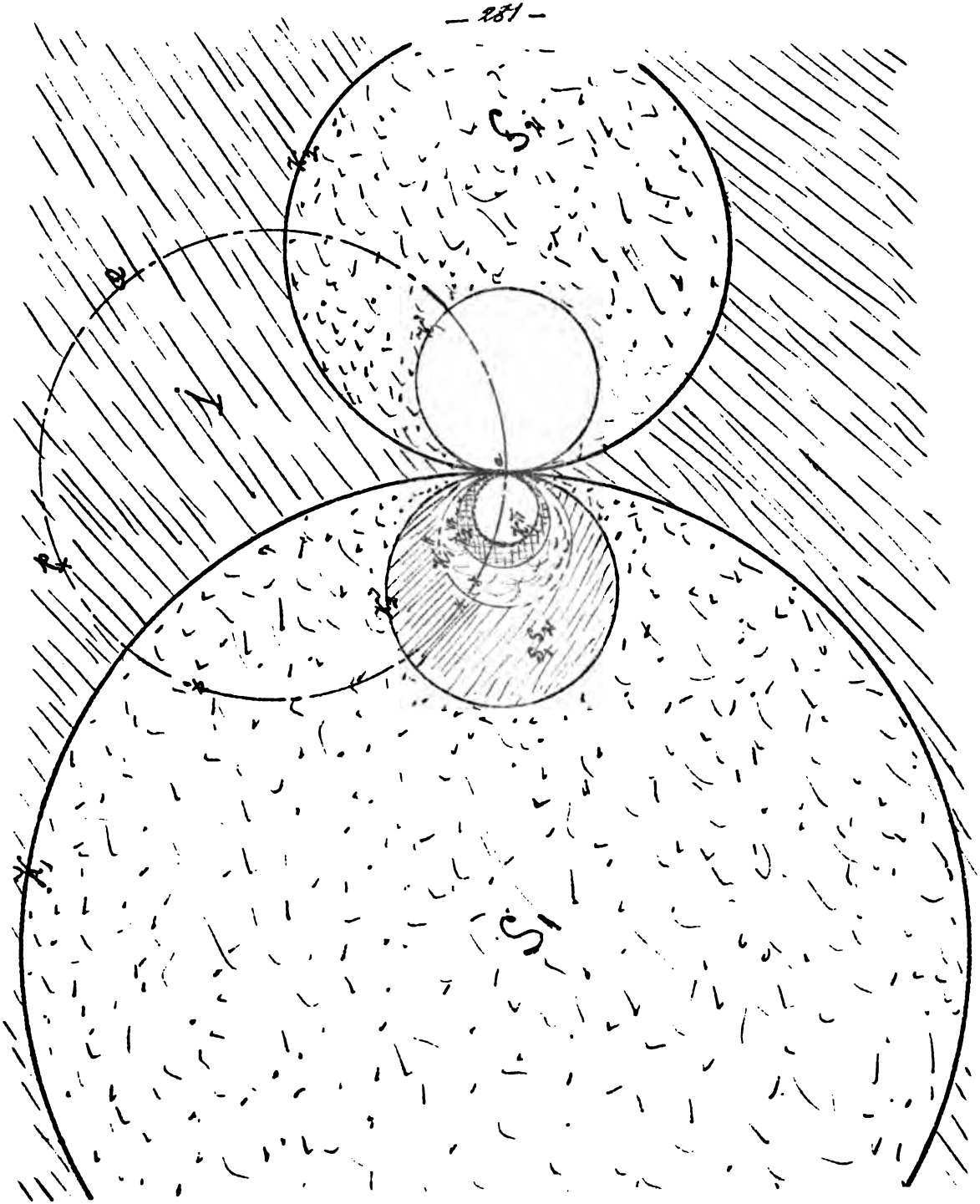
durch S_2 einen sichelförmigen Bereich S_2 in k_2. Es kommt nunmehr wieder unser schon früher erwähntes Fortgangsprincip zur Geltung, welches darin besteht, dass wir (statt die anfänglichen Inversionen als solche heranzuziehen) jeden neu erhaltenen Bereich immer wieder an seiner innern kreisförmigen Begrenzungslinie invertieren. Dass dieses Princip sich mit der Forderung, alle Combinationen der Inversionen S_1 und S_2 auf den Ausgangsbereich anzuwenden, deckt, wurde früher gezeigt. Gleichzeitig wurde aber dem Principe bereits eine erweiterte Form gegeben, dahin gehend, dass man an jedem neu gewonnenen Begrenzungskreise nicht nur den

angrenzenden Bereich, sondern überhaupt alle bis dahin construierten Bereiche spiegelt. Haben wir also in unserm Falle erst einmal die 3 Bereiche $1, S_1, S_2$ (vergl die Figur auf pg. 281), so erhalten wir durch Spiegelung an K_2' sofort drei neue Bereiche u.s.w. Mögen wir nun auf die eine oder andere Weise vorgehen, jedenfalls folgt in unserem einfachen Fall der Satz:

Wir bekommen als Grenze unserer aequivalenten Bereiche einen einzigen Verdichtungspunkt und dieser ist mit dem Berührungspunkt der beiden Ausgangskreise identisch.

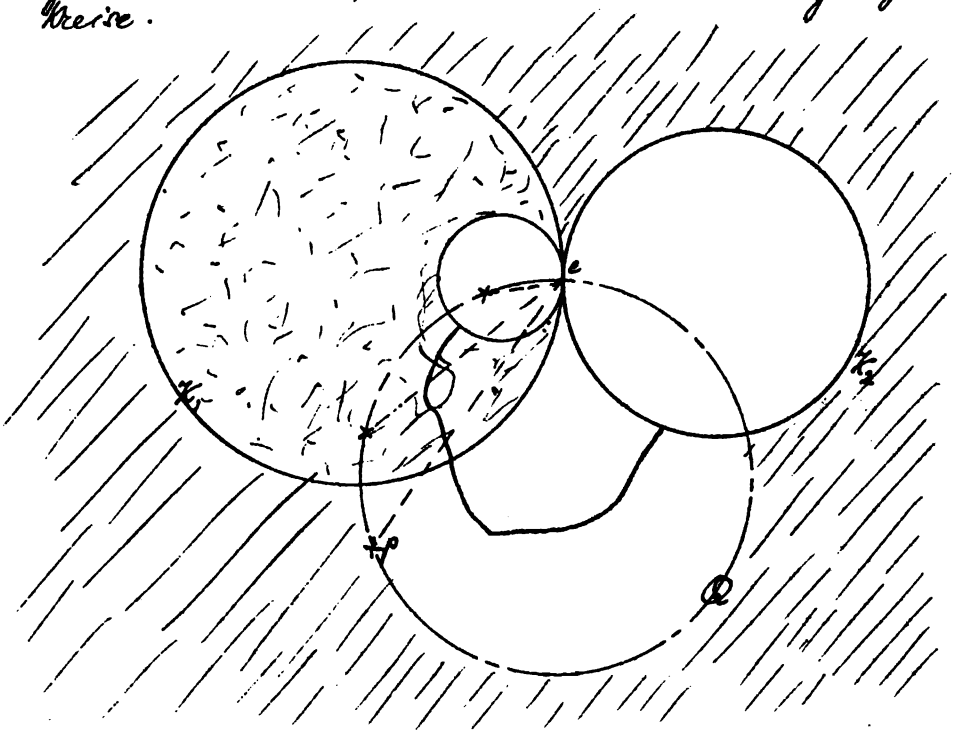
Dabei ist nun interessant, wenn wir einen beliebigen Punkt p in i geben, zu sehen, wie die Reihe der unendlich vielen mit p äquivalenten Punkte sich successive dem Grenzpunkte nähern.

Wir betrachten den Orthogonalkreis der beiden Kreise, der durch p geht (Fig. auf pg. 281). Wir wissen, dass derselbe bei allen unsern Operationen $S_1, S_2, \ldots$ in sich übergeht (weil er eben ein Orthogonalkreis der beiden Ausgangskreise ist). Die Folge ist also, dass alle Punkte, die durch Inversion aus p entstehen, auf dem nämlichen Orthogonalkreise liegen. Man kann den Orthogonalkreis gera-



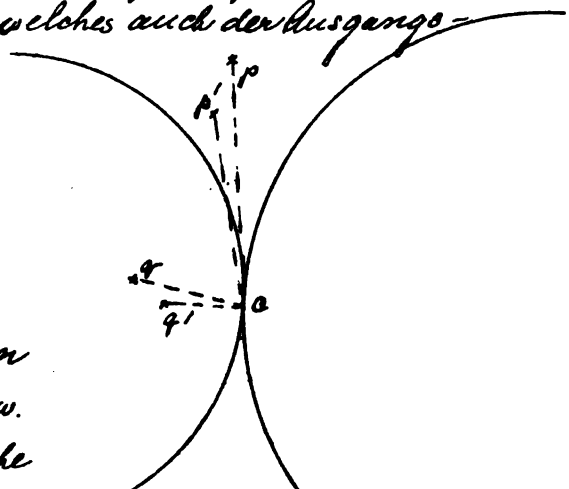
dagen als „Bahncurve" ansehen, auf der p sprungweise in immer zahlreicher, aber auch kleiner werdenden Sprüngen auf den Grenzpunkt c zurückt.

Das hat nun besonderes Interesse, wenn wir den Grenzpunkt c mit irgend einem Punkte p der Ebene geradlinig verbinden. Wendet man nämlich auf den Punkt p fortgesetzt die unserm Fortgangsprincip entsprechenden Inversionen an, so rückt p auf dem Orthogonalkreise auf c zu und die genannte Verbindungslinie nähert sich damit notwendig einer bestimmten Grenzlage, nämlich der „Centralen" der beiden Ausgangskreise.



Betrachtet man nun eine geschlossene Curve, die dadurch entsteht, daß man im Ausgangsbereich von dem einen Kreis K, nach dem andern K_2 ein beliebiges (evt. nicht-analytisches) Curvenstück zieht und zu diesem Curvenstück vermöge unserer Inversionen die Gesamtheit der aequivalenten Curvenstücke hinzukonstruiert, endlich aber noch den Punkt c hinzufügt, so hat die so geschlossene Curve, wie ich behaupte, im Punkte c eine bestimmte Tangente, nämlich die Centrale.

Dieser Satz ist eine einfache Folge des vorhin aufgestellten Hülfssatzes (der dahin ging, daß die Verbindungsgerade $\overline{cp}$, wenn man p immer wieder den Inversionen der Figur unterwirft, auf die Centrale als Grenzlage hinführt, welches auch der Ausgangspunkt p sein mag).



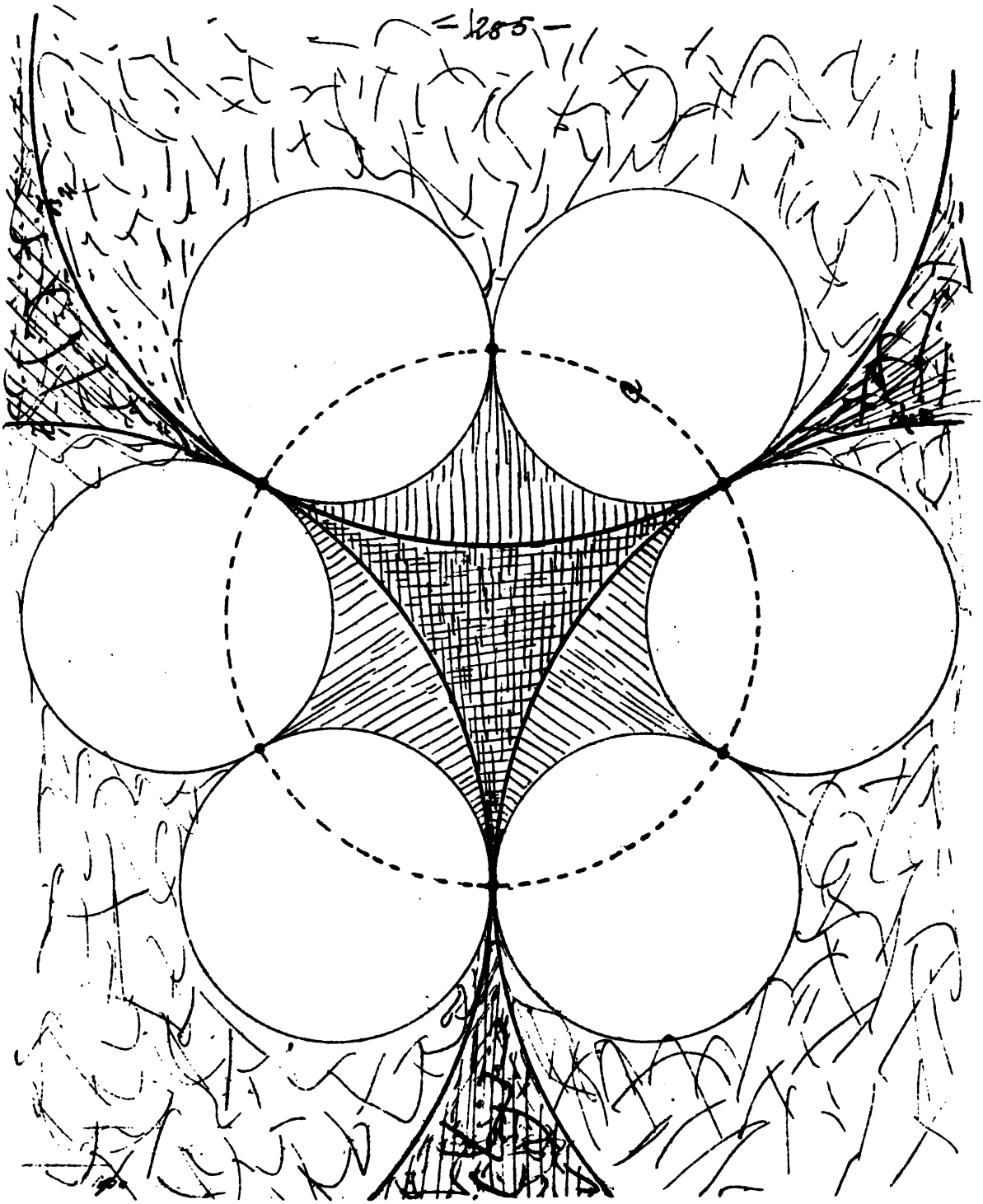
Man wähle in der That einen beliebigen Punkt q in der Nähe von c und ziehe $\overline{cq}$, gehe dann auf der Curve näher an c heran bis q' und ziehe $\overline{cq'}$ u.s.w. Alle Punkte $q, q', \ldots$, welche wir solcherweise beim Zuschreiten auf c durchlaufen mögen, haben ihnen aequivalente Punkte $p, p', \ldots$

im Ausgangsbereich und entstehen aus ihnen durch die wiederholten Inversionen. Daher haben die Geraden $\overline{cq}$, $\overline{cq'}$ ... auf Grund des vorausgeschickten Hülfssatzes in der That die Centrale zum Limes.

Ich gehe nun von diesem einfachen Fall von 2 Ausgangskreisen zu dem von 3 Ausgangskreisen über. Der Bequemlichkeit halber mögen sie alle gleich groß gewählt sein; dann besteht der Ausgangsbereich aus 2 Kreisbogendreiecken mit lauter Winkeln gleich Null (vergl. die Figur auf pg 285).

Nun wissen wir, daß drei Kreise allemal einen und nur einen Orthogonalkreis $\mathfrak{O}$ haben. Derselbe geht hier durch die 3 Berührungspunkte hindurch. Er ist bei allen in Betracht kommenden Inversionen invariant, sodaß wir ihn wählen, um uns in der Figur zu orientieren.

Um übrigens alle aequivalenten Bereiche der beiden Ausgangsbereiche zu erhalten, brauchen wir bloß die aequivalenten Gebiete im Innern des Orthogonalkreises zu konstruieren und hernach die sämtlichen so erhaltenen aequivalenten Gebiete am Orthogonalkreise zu invertieren, (womit wir die aequivalenten Bereiche des äußeren Ausgangsbereiches erhalten). Es folgt dieser Satz, bei dem ich nicht länger verweile,



einfach aus dem Grundsatz der Inversionen, den wir früher ausführlicher betrachteten, daß nämlich Figuren, die in Bezug auf einen Kreis K invers sind, bei Inversion an einem neuen Kreis Q solche Figuren ergeben, die in Bezug auf den bei der Inversion aus K hervorgehenden Kreise K' invers sind.

Wir beschränken uns also bei unseren Konstruktionen auf das Innere von Q.

Da legen sich neben das Ausgangsdreieck zunächst 3 Nebendreiecke; die 4 Dreiecke bilden zusammen ein Kreissechseck, dessen Zipfel senkrecht auf Q aufsetzen. Nach unserem Fortgangsprincip können wir nun entweder die 3 Nebendreiecke einzeln an ihren freien Kanten, oder auch gleich das ganze Sechseck an jeder seiner 6 Seiten spiegeln (wodurch wir gleich ein Neuneck erhalten). Sie sehen, wie das weitergeht:

Die äquivalenten Bereiche, die aus dem Ausgangsbereich entstehen, überdecken das ganze Innere von Q immer vollständiger (wobei die Zipfel der erhaltenen Bereiche auf Q aufliegen und dort immer zahlreicher werden).

Je weiter man den Process führt, um so dichter schließen sich die aequivalenten Bereiche an Q an, so daß schließlich jeder Punkt des Orthogonalkreises ein

Verdichtungspunkt wird.

Die hier so gezeichnete resp. geschilderte Figur, die den Herren, welche sich mit den elliptischen Modulfunktionen beschäftigt haben, hinreichend bekannt ist, ist gewissermaßen ein Geschenk, das die Geometrie von der Funktionentheorie erhalten hat. Denn obwohl man bei einem solchen bis in's Unendliche fortgehenden Process sehr wohl von dem rein geometrischen Standpunkt ausgehen kann, so ist doch der historische Werdegang der gewesen, daß man in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen genötigt war, zuerst solche Figuren zu studieren. Rein begrifflich kommt die Figur allerdings gewissermaßen bei v. Staudt vor, (insofern er zu 3 beliebigen Punkten eines Kegelschnitts immer erneut den vierten harmonischen Punkt construiert), aber v. Staudt hat das nicht anschauungsmäßig ausgeprägt.

Ich gehe noch etwas genauer auf unsere Figur mit den 3 sich berührenden Kreisen ein, indem ich noch einige Einzelheiten hervorhebe, die das Studium der Figur bei 4 sich berührenden Kreisen wesentlich erleichtern.

Ich lege die Figur symmetrisch an, indem ich die Radien der sich berührenden Kreise gleich groß

wählte, worauf ihre Berührungspunkte in den Ecken eines dem Orthogonalkreise $\mathfrak{k}$ einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks fallen. Wir erhalten die zugehörige Gesamtfigur, wenn wir entweder zuerst den innern Bereich durch Inversion reproducieren und die so entstehende Teilfigur am Orthogonalkreise $\mathfrak{k}$ invertieren, oder indem wir zunächst den äußern Bereich vervielfältigen und dann diese Figur am Orthogonalkreise spiegeln.

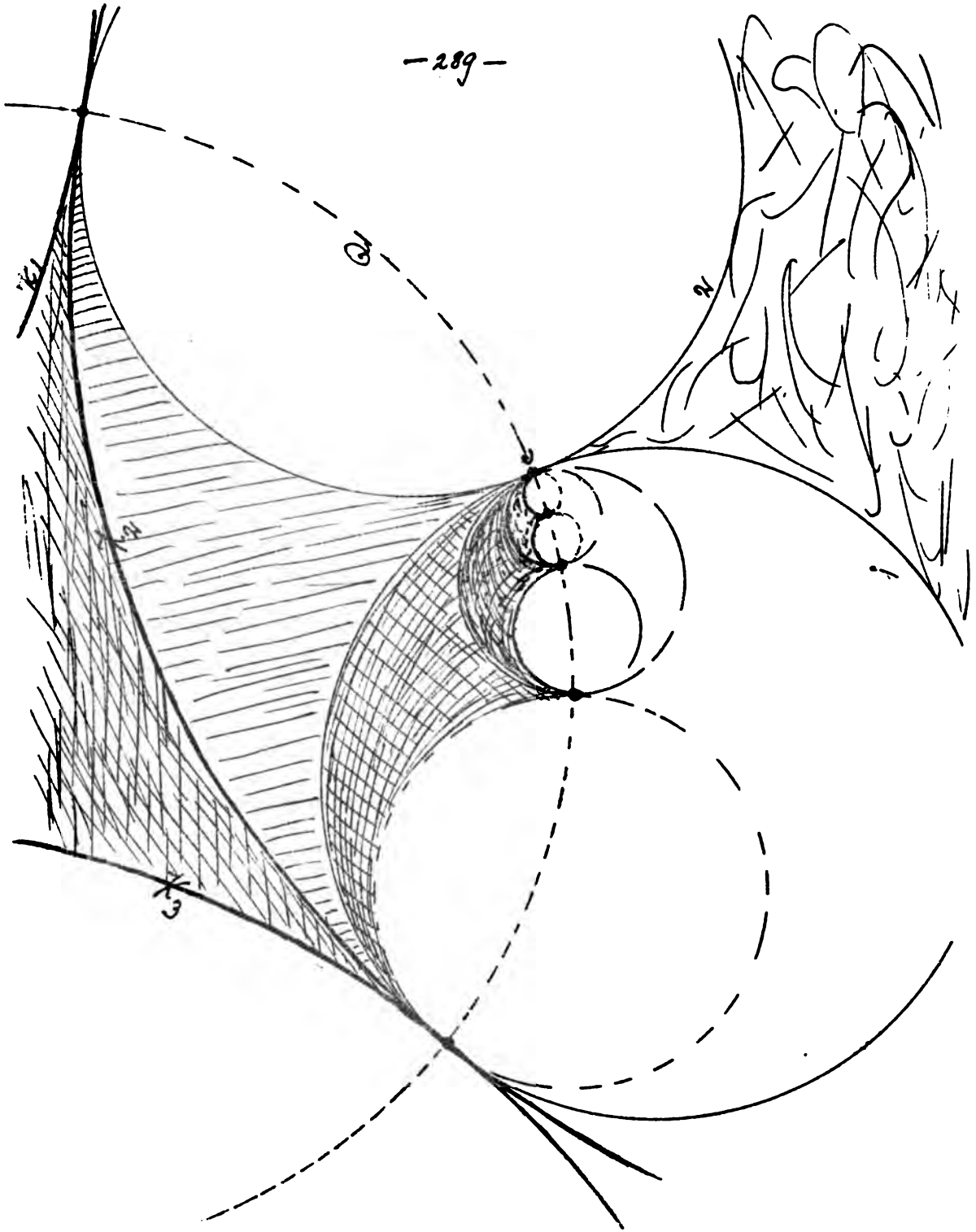
Wollen wir nunmehr darauf achten, wie sich die Contaktstellen der entstehenden Kreisbogendreiecke auf der Peripherie des Orthogonalkreises häufen. Von Hause aus haben wir 3, dann 6, weiter 12 u. s. w. Contaktstellen, sodaß wir sagen können:

Der Orthogonalkreis wird in dem Maaße als die Construktion weitergeführt wird, immer dichter mit den Contaktstellen zweier Kreise besetzt.

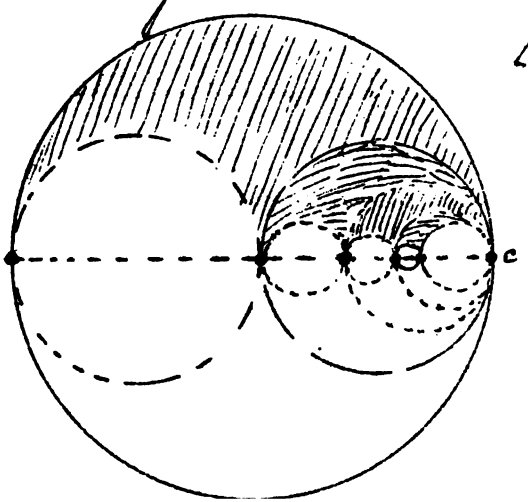
Da ist nun die nächste Frage: Was läßt sich von der Menge der Contaktstellen aussagen?

Zunächst ist sie abzählbar, weil wir die Contaktstellen durch Aneinanderreihen discreter Iterationen gewinnen. (Dabei sprechen wir ausdrücklich nicht von den „Verdichtungsstellen" der Contaktstellen, sondern nur von den Contaktstellen als solchen.)

Es ist leicht zu sehen, daß jede Contaktstelle Verdichtungspunkt der übrigen ist.


1
2
3

Wir betrachten 2 sich in c berührende Kreise auf dem Orthogonalkreise (cf Figur pg 289) und führen die Figur in der Weise fort, daß wir den einen Kreis 1 an dem anderen 2 und diesen an 1 invertieren, (es ist dies der iterierte Proceß, den wir in unserm Beispiel bei 2 sich berührenden Kreisen studierten)! Dadurch wird die Stelle c, welche zunächst nur Contaktstelle der Kreise 1 und 2 ist, Berührungsstelle unendlich vieler Kreise (die eben aus 1 und 2 durch wiederholte Inversion abgeleitet werden). Und jeder dieser unendlich vielen, immer kleiner werdenden Kreise führt mit seinem 2ten Schnittpunkt, den er mit dem Orthogonalkreis gemein hat, eine neue Contaktstelle mit sich. Man kann die Figur durch eine Reihe weiterer Kreise so ergänzen, daß man sieht, wie diese successiven Contaktstellen neben einander liegenden Spitzen angehören



[In der nebenstehenden Figur sind die Verhältnisse so gewählt, daß der Orthogonalkreis in eine gerade Linie ausgeartet ist.]

Ich resumiere vielleicht so:

1/ die unendlich vielen von uns konstruierten Kreise, die sich im Punkte c berühren und häufen, sind Begrenzungskreise von lauter dreigipfeligen Dreiecken, die bei der Fortsetzung unserer Figur ohnehin zu konstruieren sind.

2/ Indem solcherweise der Punkt c eine Häufungsstelle der bezeichneten Dreiecke wird, ist er auch eine Häufungsstelle für die Ecken der Dreiecke d. h. eben ein Verdichtungspunkt anderer Contaktstellen. —

Als weitere Eigenschaft unserer Punktmenge führe ich nunmehr an, daß sie auf dem Orthogonalkreis überall dicht liegt. Kein Stück des Orthogonalkreises bleibt nämlich frei von Contaktstellen, weil die Radien unserer Inversionskreise bei Fortsetzung unserer Konstruktion jede beliebige Kleinheit unterschreiten.

Des Weiteren treten dann als Verdichtungsstellen der Menge der Contaktpunkte noch alle übrigen Punkte von Q hinzu, die nicht schon selbst als Contaktpunkte mitzählen.

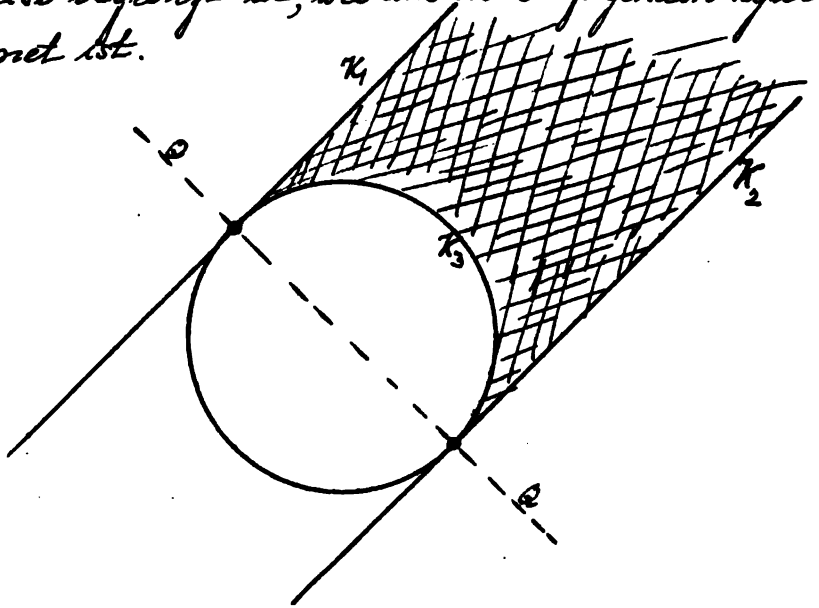
Die Beziehung zwischen den überall dichten Contaktstellen auf dem Orthogonalkreise und den sonstigen Punkten auf Q ist ganz ähnlich der Beziehung zwischen den rationalen und irrationalen Punk-

ten auf einer Abscissenaxe, indem auf letzterer die „rationalen" Punkte auch überall dicht liegen und abzählbar sind, während die „irrationalen" Punkte als Verdichtungsstellen der rationalen erscheinen. Denken wir daran, daß nach Dedekind die irrationale Zahl durch den Schnitt definiert wird, den sie in der Menge der rationalen Zahlen macht, so wird die in Rede stehende Analogie noch deutlicher, wenn man sagt, daß auch hier jeder Punkt des Orthogonalkreises, der nicht selbst eine Contaktstelle ist, einen Schnitt in der Menge der Contaktstellen macht und durch diesen geradezu definiert werden kann. -

Ich habe diese Dinge soweit etwas unbestimmt vorgetragen, da ich an keinerlei quantitative Beziehungen, sondern nur an die Figur als solche angeknüpft habe. Aber es ist leicht, die Figur in eine Gestalt umzusetzen, an der sich die Sache arithmetisch verfolgen läßt.

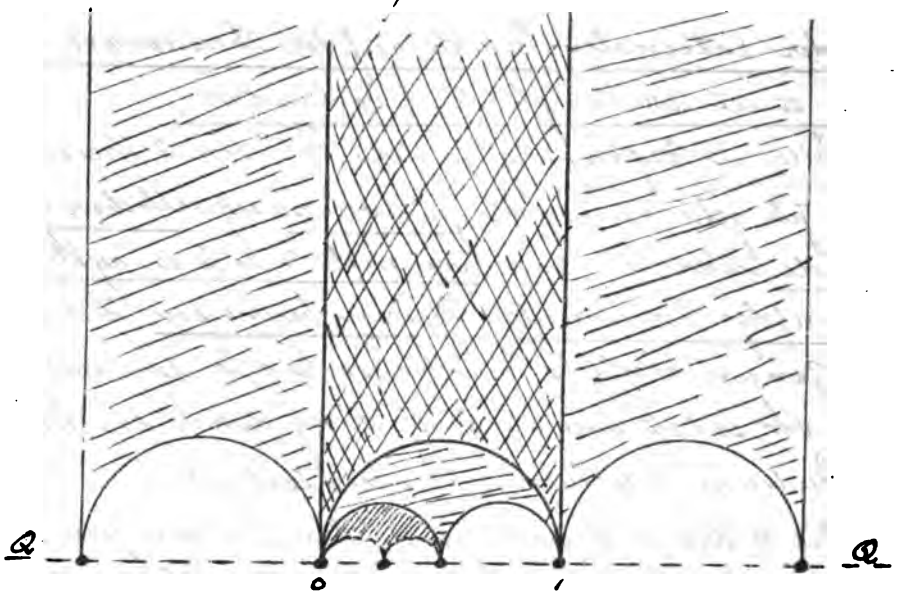
Wir können nämlich, da es sich um Verhältnisse handelt, die bei beliebiger Inversion der Gesamtfigur nicht geändert werden, ohne Einschränkung der Allgemeinheit dem Ausgangsbereiche eine einfache Form geben. Man invertiere das Ausgangsdreieck an einem Kreise, der seinen Mittelpunkt in einer Dreiecksecke hat. Man erhält so ein Dreieck, welches von 2 parallelen gera-

den Linien und einem diese Geraden berührenden Halbkreise begrenzt ist, wie dies in der folgenden Figur gezeichnet ist.



Der Orthogonalkreis wird zu einer Geraden QQ gestreckt, die durch die beiden im Endlichen gelegenen Contactpunkte geht.

An diese Figur knüpft die gewöhnliche Darstellung der in Rede stehenden Verhältnisse an, die man in der Functionentheorie giebt (wobei man die Figur noch bequem gegen das Coordinatensystem orientiert). Man wählt dann nämlich die Gerade QQ als x-Axe und den Anfangspunkt und Maafsstab so, daſs die beiden Ecken im Endlichen in die Punkte $x = 0$, $x = i$ fallen. Hier ist die Gesamtfigur leicht zu konstruieren, indem



wir nach rechts und links die erste Figur wiederholen und in jeden der dabei auftretenden Halbkreise hinein die so erhaltene Serie von unendlich vielen Dreiecken spiegeln (vergl. die Figur oben). Auf diese Weise kommen alle Contaktpunkte auf die x-Axe zu liegen, und es ist nun leicht, was an unserer ersten Figur nur in Anlehnung an das unmittelbare geometrische Gefühl erläutert wurde, jetzt auf arithmetischer Basis genau zu berechnen. Die dann auftretenden Formeln zeigen, daß die successiven Contaktpunkte lauter rationale Abscissen x bekommen und daß auch jeder Punkt mit einem rationalen x ein Contaktpunkt wird. Es besteht demnach nicht nur eine Analogie zwischen der Menge der Contaktpunkte und der Men

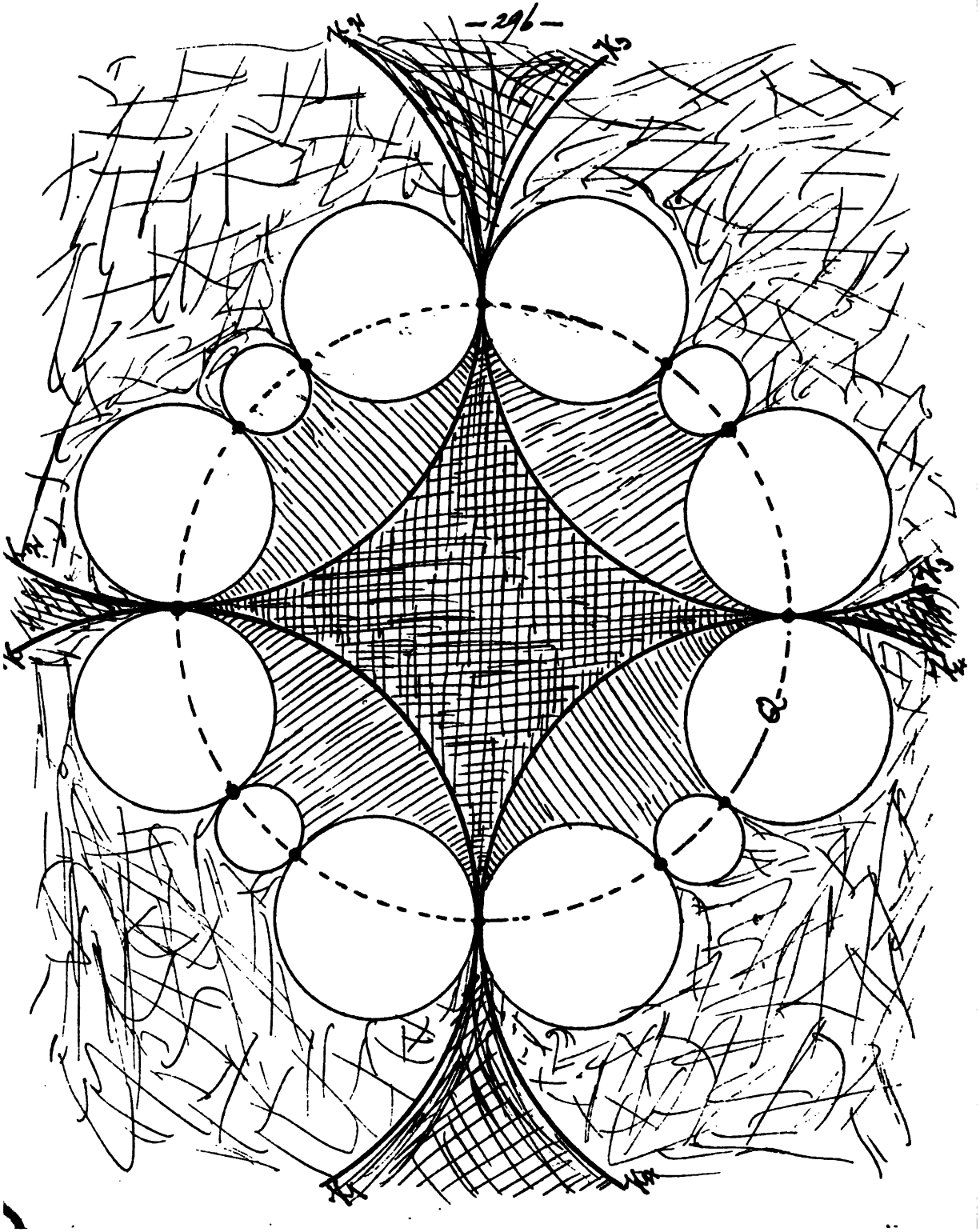
ge der rationalen Punkte auf der Abscissenaxe, sondern es ist direkt Identität vorhanden.

Dies als Ergänzung zu dem Falle von 3 Kreisen!

Ich gehe nunmehr zu unserm eigentlichen Gegenstande über, bei dem wir mit 4 sich in cyklischer Reihenfolge berührenden Kreisen beginnen. Hier liegen im Ganzen ähnliche Verhältnisse wie bei dem vorigen Falle vor, so daß uns die Auffassung durch das eingehende Studium desselben sehr erleichtert ist.

Die 4 Kreise mögen zunächst noch einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen (vergl. die Figur pg. 296). Wir mögen dann als Ausgangsbereich zunächst das äußere oder das innere der beiden entstehenden Kreisbogenvierecke benutzen.[1] Indem wir an letzteres anknüpfen und die Inversionen ausführen, erhalten wir zunächst gemäß unserm Fortgangsprincip durch Construktion der anliegenden Vierecke ein aus 5 Vierecken bestehendes Zwölfeck, dann ein 36-eck u.s.w. Die Contaktpunkte auf dem Orthogonalkreise werden also bei diesem allseitig symmetrischen Verfahren der Reihe nach 4, 12, 36, 108, ... sein. Wir fragen gleich, wie die Contaktpunkte über die Peripherie des

[1] Als äußeres Kreisbogenviereck bezeichnen wir den Bereich, der sich durch das Unendliche zieht.

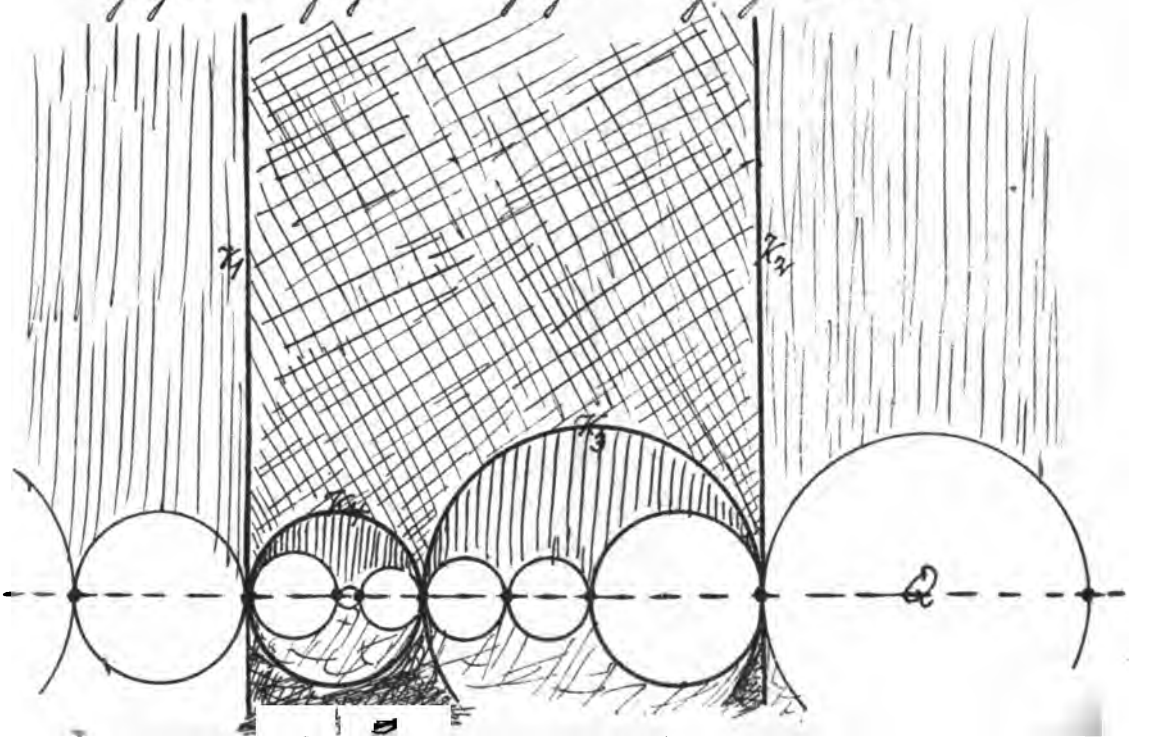

Q

Orthogonalkreises verteilt sind. Wir können hier sofort folgendes anführen:

1/ Die Menge der Contaktpunkte ist abzählbar,

2/ die Menge der Contaktpunkte liegt auf dem Orthogonalkreise überall dicht, sodaß sämtliche Punkte des Orthogonalkreises als Verdichtungsstellen von äquivalenten Bereichen erscheinen, (aequivalent zum Ausgangsbereich, aus dem sie nach dem Fortgangsprincip hergestellt sind).

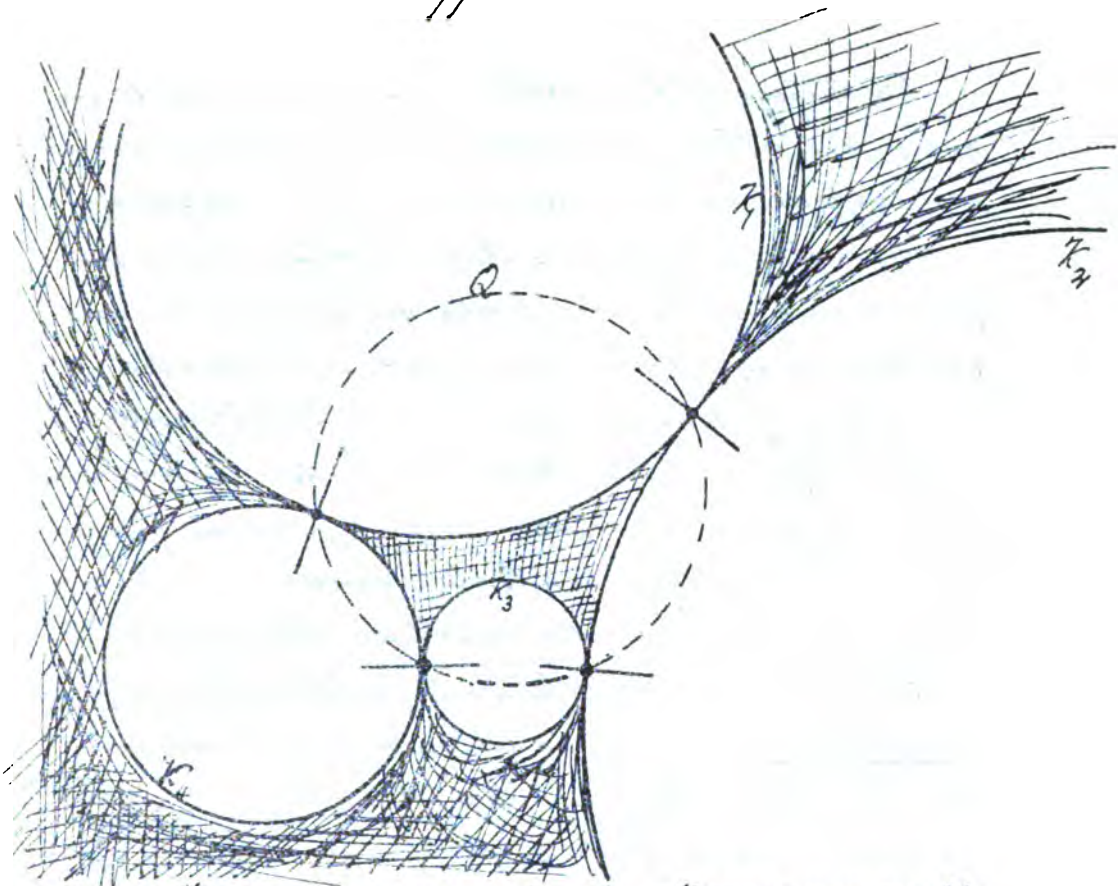
Wir wollen nunmehr unsere Figur wieder dadurch spezialisieren, daß wir durch eine geeignete Hilfsinversion einen Contaktpunkt in's Unendliche werfen. Wir erhalten damit folgende Figur, die bei der arithmetischen Behandlung zweckmäßigerweise zugrunde gelegt wird:



Der Orthogonalkreis artet in eine Gerade aus, die wir zur x-Axe wählen, 2 von den Kreisen werden wieder parallele Gerade, während die beiden andern sich zwischen diesen senkrecht auf die x-Axe aufsetzen. Durch Spiegelung nach rechts und links an den Geraden und Inversionen an den Kreisen ergiebt sich dann die Gesamtfigur. Indem wir wieder 2 der Contaktpunkte nach 0 und ∞ legen und die Abscisse des dritten im Endlichen gelegenen mit δ bezeichnen ($0 < \delta < 1$), erhalten wir auf der x-Axe eine Menge von Contaktpunkten, die sich nicht mehr mit der Menge der schlechtweg rationalen Punkte deckt, aber Abscissenwerte besitzt, welche rational von der Größe δ abhängen. Es ist nun ein an sich interessantes Studium, zu untersuchen, wie diese rationalen Funktionen der Größe δ beschaffen sein mögen, (wie sie independent mögen definiert werden können u.s.w.).

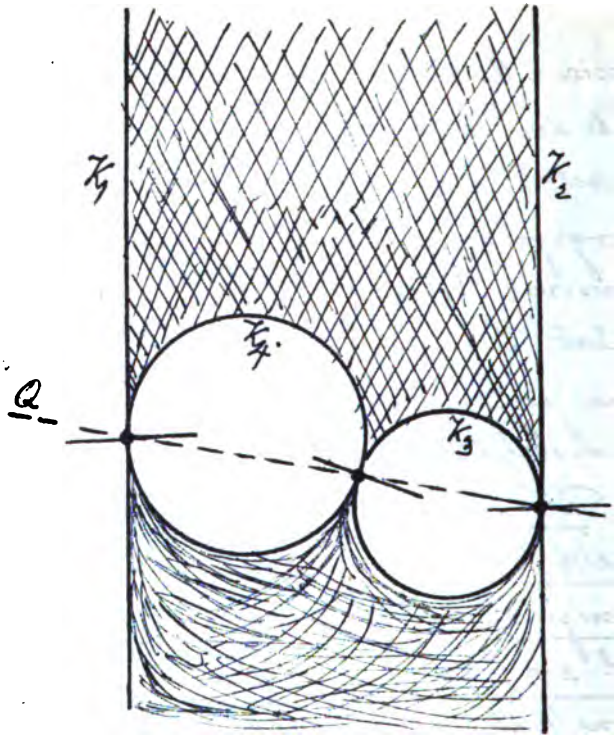
Dies war der spezielle Fall, wo für die 4 Ausgangskreise ein Orthogonalkreis existiert. Wir gehen nun zu dem natürlich viel complicierteren allgemeinen Fall über, aber auch da werden wir eine gewisse Übersicht vermöge unserer bisherigen Sätze gewinnen.

Ich sage zunächst: Es seien 4 Kreise gegeben, die sich in cyklischer Reihenfolge berühren. Dann gilt immer noch der Satz, daß die 4 Berührungspunkte auf



einem Kreise liegen (der aber im allgemeinen nicht Orthogonalkreis ist). Vgl. die Figur oben.

Um zunächst diesen Hülfssatz zu beweisen, wenden wir den schon benutzten Kunstgriff an, durch Inversion an einem Kreise (der um einen Eckpunkt der Figur als Mittelpunkt beschrieben ist) die Figur zu vereinfachen. Die beiden in dem als Inversionscentrum dienenden Eckpunkte zusammenstoßenden Kreise mit dem Winkel Null verwandeln sich dabei in 2 parallele



Gerade, und die beiden anderen Kreise ordnen sich in dem Raume zwischen diesen, wie es die Figur zeigt, ein.

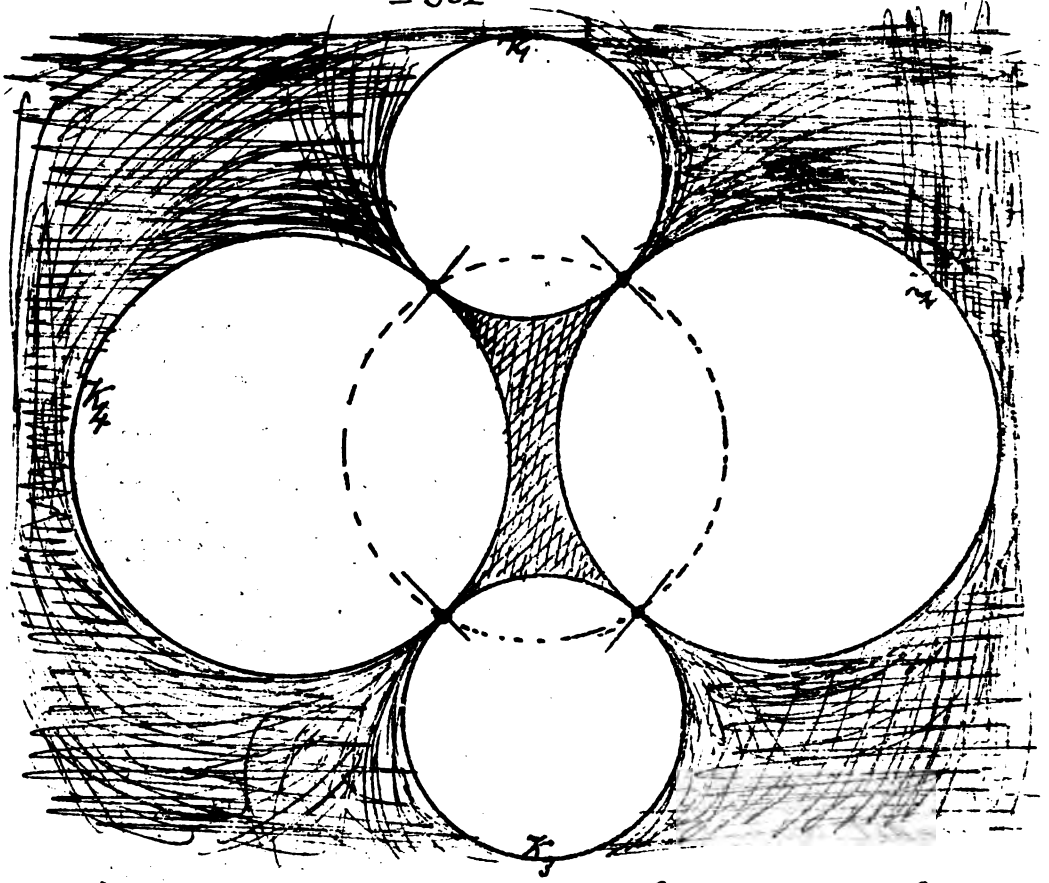
Wollen wir nun zeigen wollen, dass in unserer ursprünglichen Figur die 4 Berührungspunkte auf einem Kreise liegen, so haben wir hier zu zeigen, dass sich durch die 3 im Endlichen gelegenen Berührungspunkte eine Gerade legen lässt. Dass dies der Fall ist, ist sofort elementargeometrisch klar und damit unser Hülfssatz bewiesen. Wir nennen diese Gerade die <u>Querlinie Q</u>, allgemein, den Kreis durch die 4 Ecken des Vierecks den <u>Feuerkreis Q</u>.

Zugleich ist aber noch weiter klar, wenn wir in den Berührungspunkten die Normalen gegen die Kreise errichten (die sich beziehungsweise in den Mittelpunkten der beiden mittleren Kreise schneiden), dass dann

unsere Quadlinie diese Normalen oder Centralen (wie ich der Deutlichkeit halber lieber sagen will) unter dem Winkel $\pm \varphi_0$ schneidet, wo φ_0 ein von Null verschiedener, vorgegebener Winkel ist. Ist $\varphi_0 = 0$, so kommen wir auf unseren Normalfall der vorigen Erörterungen zurück. Übrigens wird φ_0, wie die Dimension der Figur zeigt, immer $< 45°$ sein. Übertragen wir dieses Sachverhältnis auf unsere ursprüngliche Figur, so heißt es:

Die 4 Contaktpunkte der Figur liegen auf einem Kreise $\mathfrak{Q}$ und zwar bildet dieser Kreis (Querkreis) mit den zu den Contaktpunkten gehörigen Centralen Winkel $\pm \varphi_0$, wo φ_0 eine gegebene Größe $< \frac{\pi}{4}$ hat, die wir von Null verschieden nehmen, damit wir nicht auf den einfachen Fall zurückkommen.

Dieser Satz mag dazu dienen, der Ausgangsfigur eine für die weitere Betrachtung zweckmäßige Form zu geben. Es ist ein altes Prinzip, daß eine komplizierte Figur durch symmetrische Anlage weitaus an Faßlichkeit gewinnt, und so mag denn im Folgenden die Ausgangsfigur in der Weise gezeichnet werden, daß wir mit dem Querkreis $\mathfrak{Q}$ beginnen und die 4 Contaktpunkte in den Ecken eines dem Querkreise einbeschriebenen Rechtecks wählen (vergl die Figur auf pg. 302).

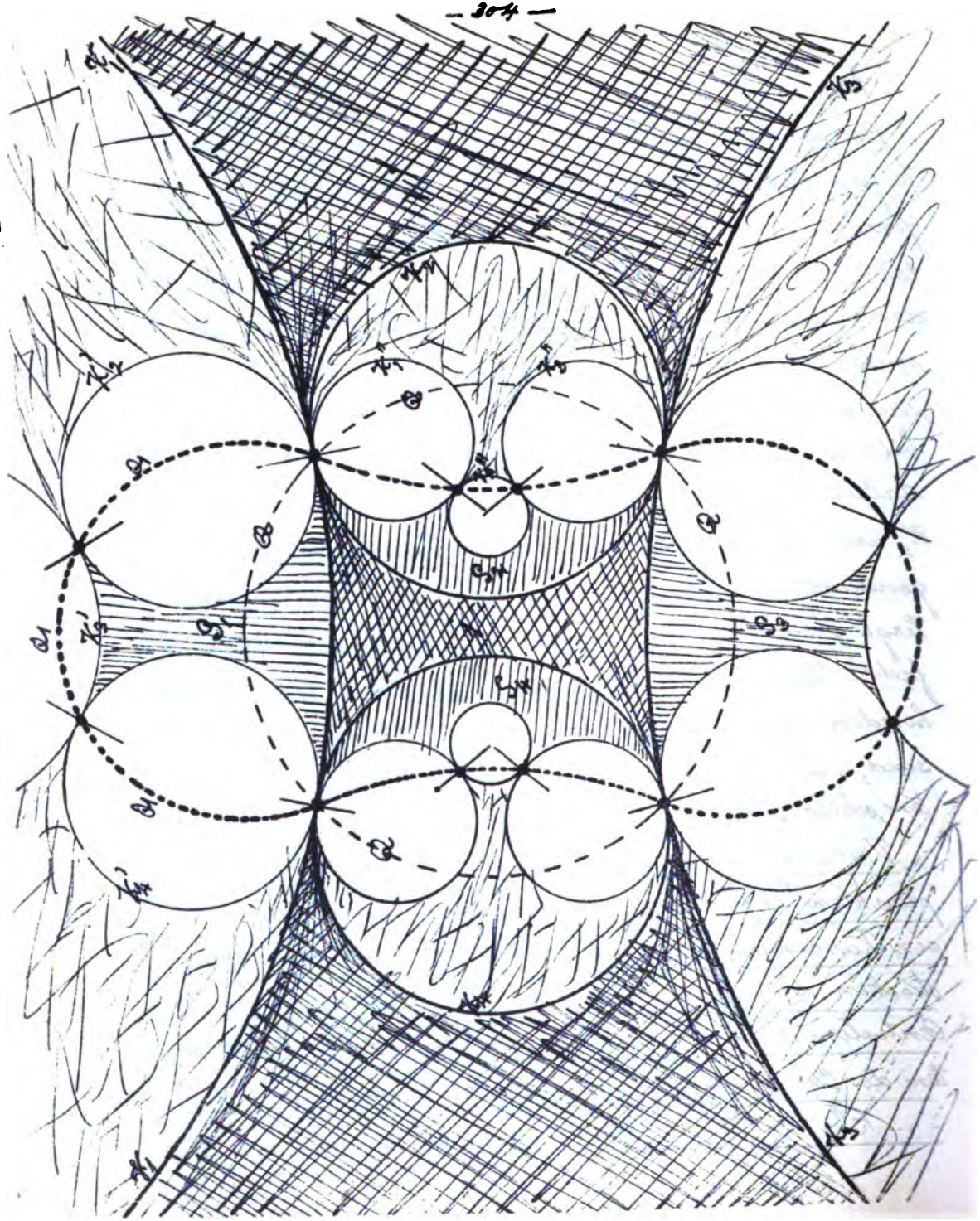


Zeichnen wir dann noch die Richtungen der Centralen, unter geeigneter Annahme eines von 0 verschiedenen Winkels $\pm\varphi_0$, ein, so ist es leicht, hinterher die 4 „Ausgangskreise" festzulegen (die die zu den Centralen „senkrechten Normalenelemente enthalten). Wir bekommen dabei ein inneres und äußeres Kreisbogenviereck, die in Bezug auf den Querkreis Q nicht genau inners sind, aber zwischen denen noch diese Beziehung im „Sinne der Analysis situs" besteht.

Nunmehr reproducieren wir die Figur zunächst durch Inversion an K_1. Es möge so aus Q Q', aus K_2 K_2', aus K_3 K_3', K_4 K_4' entstehen. Die Construction dieser 4 Kreise wird uns dadurch erleichtert, daß die auf dem Kreise K_1 gelegenen Contaktpunkte, die die Schnittpunkte von K_1 mit Q sind, erhalten bleiben. Der Winkel φ_0 bleibt auch erhalten, nur daß er, um z. B. Q' zu zeichnen, nach der andern Seite von den Centralen aus abzutragen ist. Dadurch erhält Q' oder vielmehr der uns allein interessierende Bogen von Q', der in das Innere von K_1 fällt, eine ganz charakteristische Gestalt. Ebenso leicht ist Q nach K_2 zu spiegeln, hier aber wird die convexe Seite nach dem Kreise Q gewendet sein. Wir bezeichnen das in K_2 fallende Stück mit Q''. Denken wir uns das an K_3 und K_4 so fortgesetzt, so haben wir folgendes Resultat:

Der Querkreis Q ist nach den 4 Inversionen ersetzt durch 4 Kreisbogenstücke Q', Q'', Q''', Q'''', welche sich in den Contaktpunkten ohne Knick aneinanderreihen, indem sie mit den Centralen der Contaktpunkte Winkel $\pm\varphi_0$ bilden (vergl. die Figur auf pg. 304).

Nachdem diese neuen Querkreise gezeichnet sind, ist es sehr leicht, die Kreise K_2, K_3, K_4 an K_1, oder die Kreise K_3, K_4, K_1 an K_2 zu spiegeln u. s. w.



können Sie die Inversion an K_1.

Bei der Inversion kommen die neuen Contaktpunkte zunächst auf das Kreisbogenstück $\mathfrak{C}'$ und dann auf die Geraden durch den Mittelpunkt von K_1 und die alten Contaktpunkte, also in deren Durchschnitt. Zeichnen wir sodann die Centralen in richtiger Stellung ein, so ist es nicht schwer, die Bilder der 3 Kreise K_2, K_3, K_4 zu construieren, die zusammen mit K_1 ein erstes Stützbild unseres Ausgangsvierecks umgrenzen. Ebenso gestaltet sich die Inversion an K_3, etwas anders an K_2 und K_4, insofern dort der Bereich wegen des Kreisbogenstücks $\mathfrak{C}'$ resp. $\mathfrak{C}^{IV}$ eine etwas andere Gestalt erhält. Vergleiche hierzu die Figur auf pg. 304. Indem das einfachste Element für die leichte Auffassung der so entstehenden Figur der Kreis $\mathfrak{C}$ und die Kreisstücke $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \mathfrak{C}''', \mathfrak{C}^{IV}$ sind, will ich die Figur nochmals mit folgenden Worten schildern:

Ursprünglich hatten wir einen Kreis mit 4 Contaktpunkten und ihren Centralen. Aus diesem Kreise $\mathfrak{C}$ ist ein Kurvenzug geworden, bestehend aus 4 Kreisbogenstücken, der jetzt im Ganzen 12 Contaktpunkte mit 12 Centralen trägt. Auf diesen 12 so entstehenden Segmenten des Curvenzuges erheben sich 12 Kreise $K', K'' \ldots$ $\ldots K^{IV} \ldots$. Diese zerlegen die Ebene in ein Inneres,

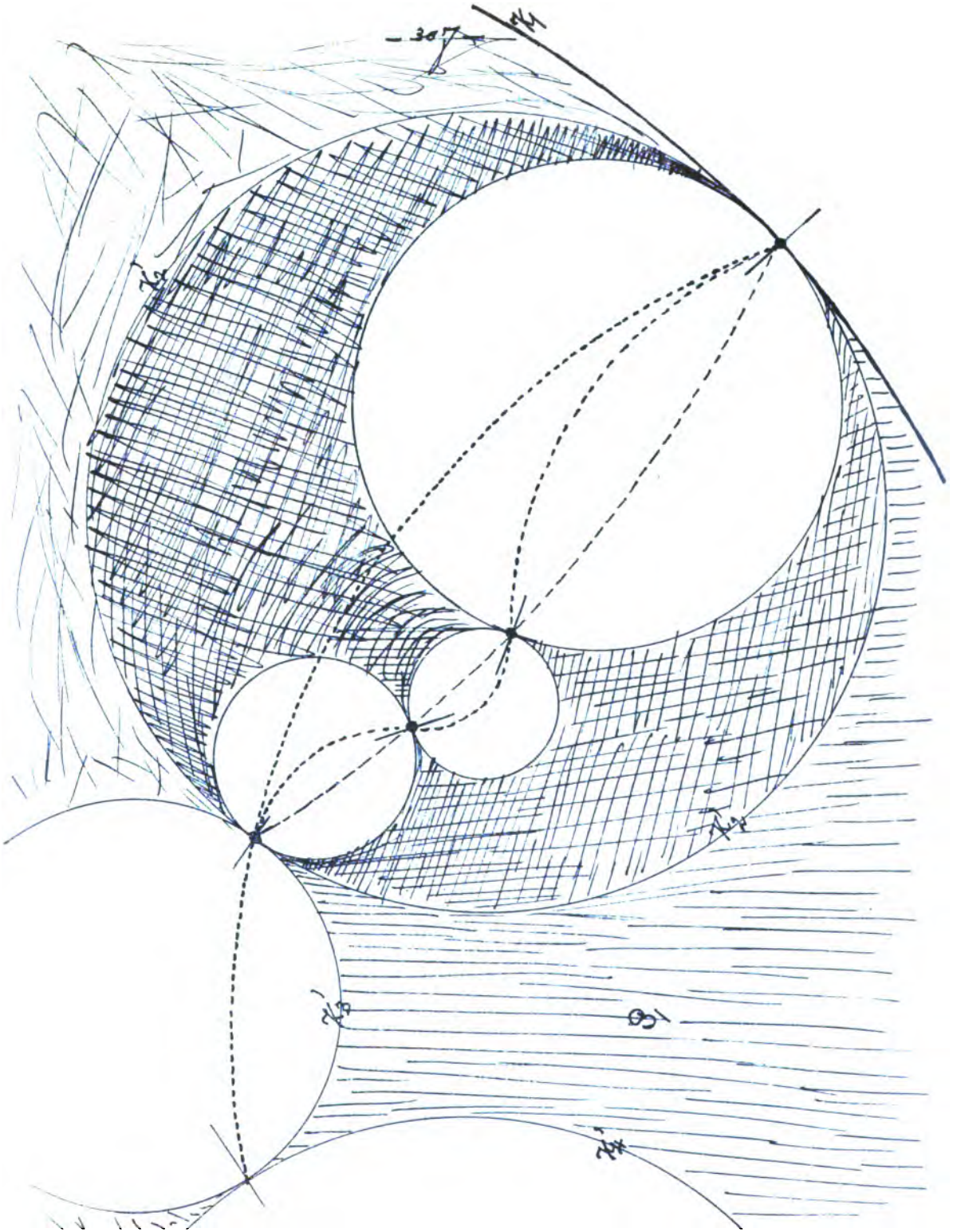
welches aus 5 Vierecken, und ein Äußeres, das ebenfalls aus 5 Vierecken besteht, und lassen uns im Übrigen Freiheit, im Innern der 12 Kreise noch weitere Details zu zeichnen.

Es ist ganz klar, wie die Sache gemäß unserm Fortgangsprincip weitergeht.

Wir greifen einen der neuen Kreise z.B. K_2' heraus, der an der Bildung eines Kreisbogenvierecks partiicipiert. Unser Fortgangsprincip ist, die beiden Vierecke, die von aussen an K_2'' heranreichen, in den Kreis K_2' hineinzuspiegeln. Die Folge ist, daß wir in K_2' 3 neue Kreise erhalten, deren Berührungspunkte auf demjenigen Querkreisstück liegen, das aus C' durch Inversion an K_2' entsteht (vergl. die Figur auf pg. 307). Die Curve, die stellenweise an Stelle des innerhalb K_2' verlaufenden Stückes von C' tritt, wird aus 3 Kreisbogen bestehen, die sich ohne Knick in der durch die Figur angedeuteten Weise aneinanderreihen, wobei sie abwechselnd Winkel $\pm\varphi_0$ mit den bezüglichen Centralen bilden.

Berücksichtigen wir die Gesamtfigur, so folgt der Satz:

Wenn wir nach unserm allgemeinen Fortschreitungsprincip in jeden unsrer vorhin erhaltenen 12 Begrenzungskreise jetzt hineingehen, dann erhalten wir statt der 12 Begrenzungskreise mit ihren 12 Contaktpunkten deren



36, indem in jedem bisherigen Kreise drei neue entstehen. Dabei wird von den 12 Stücken der Querkreise $\mathfrak{A}' \ldots \mathfrak{A}^{IV}$, die wir bei dem letzten Schritt erhielten, jetzt jedes in 3 weitere Kreisstücke zerlegt, die sich nach Art einer Wellenlinie ohne Knick in den 36 nunmehr vorhandenen Contactpunkten (zu denen auch die früheren 12 gehören) aneinander schließen, wobei sie mit den zugehörigen Centralen Winkel $\pm \varphi_0$ bilden.

Offenbar erinnert diese successive Zerlegung der Querkreisstücke in 3 und Ersetzung der einzelnen Stücke durch drei neue Querkreisstücke daran, wie wir bei der Peano-Curve die geradlinigen Stücke zunächst in 3 Glieder teilten und dann jedes durch Zickzacklinien von 3 geraden Linien ersetzten; beidemal ist im analogen Sinne die Zahl 3 bevorzugt, aber während bei der Peano-Curve die Discontinuität sehr schroff ist, haben wir hier noch Stetigkeit der ersten Differentialquotienten.

Sie begreifen, worauf es nun ankommt. Ich bezeichne $\mathfrak{A}$ mit C_1, $\mathfrak{A}' + \ldots + \mathfrak{A}^{IV}$ mit C_2, die folgende aus 12 Kreisbogenstücken zusammengesetzte Wellenlinie mit C_3 u. s. w. Jede Curve C_n enthält die Contaktpunkte aller vorausgehenden und dann noch die doppelte Anzahl

meinen. Die Frage ist:

Was ist C_∞, der Ort aller Contaktpunkte und aller Verdichtungsstellen von Contaktpunkten, also die Punktmenge, welche das Aggregat der unendlich vielen inneren Vierecke von dem Aggregat der unendlich vielen äußeren Vierecke abtrennt?

Nennen wir C_∞ schon eine Curve, so greifen wir dem voraus, was wir noch erst beweisen müssen. Jedenfalls wird sich aber die Bezeichnung rechtfertigen, wir werden geradezu folgende Sätze beweisen:

1) C_∞ ist eine Jordan-Curve, d.h. es ist durch Formeln folgender Art: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ darstellbar, wo φ, ψ die bekannten Eigenschaften haben.

2) In all den unendlich vielen und auf C_∞ über all dichten Contaktpunkten hat sie die zugehörigen Centralen zu Tangenten.

3) Die Curve ist aber keineswegs analytisch (solange φ_0, wie wir ausdrücklich annahmen, von Null verschieden ist).

Von diesen Behauptungen beweise ich zunächst die 2te:

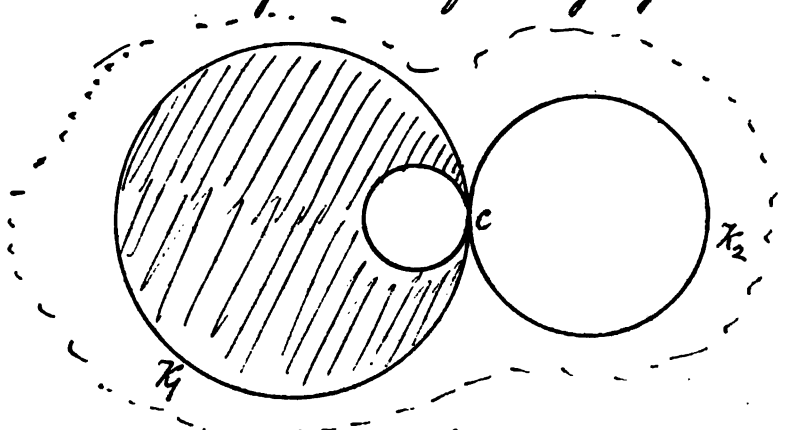
In jedem Contaktpunkte c der unendlichen Punktmenge C_∞ hat letztere die zugehörige Centrale als Tangente.

Dabei verstehen wir unter der Tangente einer Punktmenge in einem Punkte natürlich die Grenzlage, welcher sich die

Sekante, d.h. die Verbindungslinie des Punktes mit irgend einem andern, ins Innre zustrebt.

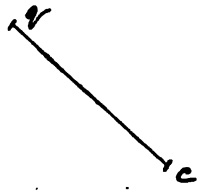
Ich beweise den Satz, indem ich an Betrachtungen anknüpfe, die wir bereits früher anstellten, die ich hier aber in Anlehnung an unsere speziellen Verhältnisse noch etwas breiter wiederhole.

Wir haben 2 umfassendste Kreise, die sich in dem Berührungspunkte c, den wir betrachten wollen, berühren und die Ebene in ein Äußeres und Inneres zerlegen.



Wir stellen uns die gesamte Punktmenge C∞ nun in der Weise her, daß wir uns zuerst Alles das gezeichnet oder gezeichnet denken, was davon in das Äußere unserer beiden Berührungskreise fällt, (es ist dies eine Punktmenge, von der wir noch nicht wissen, ob sie eine Curve in dem von uns definierten Sinne ist, – die zunächst vorgenommene Entwickelung ist davon unabhängig –),

und daß wir die so entstehende Figur in den Kreisen k_1, k_2 durch fortgesetzte Inversion nach unserem Fortgangsprincip vervielfältigen, wobei der Contaktpunkt c als Grenze auftritt. Die Frage ist: Können wir von einer Tangente im Punkte c reden?



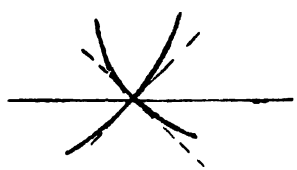
Wir werden dann von einer Tangente der Menge in c reden, wenn eine Secante $\overline{qc}$, wo q ein beliebiger Punkt der Menge ist, sich beim Herandrücken des q an c einer bestimmten Grenzlage nähert, unabhängig davon, wie wir die Annäherung des q an das c wählen mögen.

Wir sagen jetzt so: Mag q gewählt sein, wie es will, jedenfalls hat es im Außenraum irgendwo einen äquivalenten Punkt p; denn q ist erhalten, indem wir die Punkte p fortgesetzt den Inversionen an den Kreisen k_1 und k_2 unterwarfen. Es ist also jede Sekante $\overline{qc}$ mit einer Secante $\overline{cp}$ gemäß unserer früheren Ausdrucksweise „aequivalent", unter p einen Punkt der Aussenmenge verstanden. Daraus folgt aber, daß man alle Sekanten $\overline{qc}$ bekommt, wenn man alle Sekanten $\overline{pc}$ zieht und diese immer wiederholt den Operationen S_1 und S_2 unterwirft. Vermöge dieser Überlegung erhält unsere Ausgangsfrage folgende neue Form:

Was wird aus der Sekante $\bar{pc}$, wenn ich auf sie die Operationen S_1, S_2 unbegrenzt oft anwende? (oben fragten wir, was aus der Sekante $\bar{qc}$ im Limes wird).

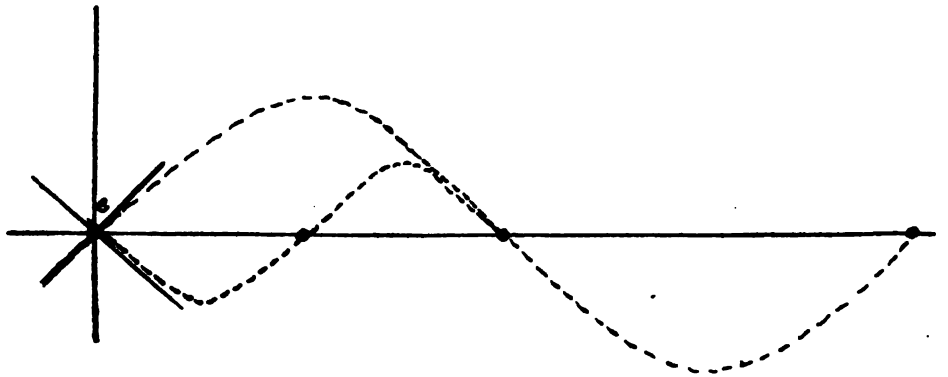
Damit aber kommen wir in den Bereich unserer Entwickelungen auf pg. 283. Wir wissen, daß eine immer wiederholte Anwendung von S_1 und S_2 auf eine ganz beliebige Sekante $\bar{pc}$ die Centrale als Limes liefert. Daraus folgt dann, daß die Sekante $\bar{qc}$ ihrerseits ebenfalls die Centrale zum Limes hat, und daß wir also in der That die Centrale als Tangente in c bezeichnen dürfen, w.z.b.w.

Das Resultat ist amüsant, wenn wir an die successiven Curven $C_1, C_2 \ldots$ denken. Diese berühren nämlich im Punkte c alternierend die Richtung $\pm \varphi_0$. Der Limes C_∞ aber berührt, wie wir jetzt wissen, die Centrale selbst. (Es ist, wie bei der Leibniz'schen Reihe, die fortgesetzt zwischen 0 und 1 schwankt, während der Wert $^1/_2$ dargestellt werden soll).



Um ein solches Verhalten der Curven plausibler zu machen, bilde ich folgendes Beispiel, wo Analoges der Fall ist.

Wir legen in der Figur pg. 313 durch c eine Sinus-

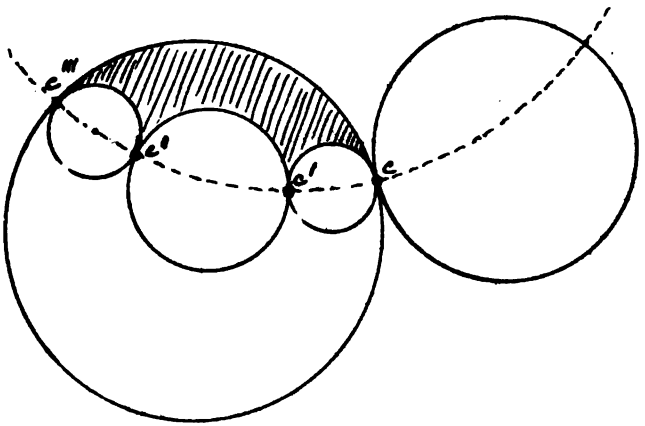


curve
von der Amplitude ± 1 (die den Curven $C_1, C_2 \ldots$ inso-
fern ähnlich ist, als sie auch schlangenartigen Typus
hat) und lagern daneben eine 2te Sinuscurve von der
halben Schwingungsweite und Amplitude, deren erste
Schwingung wir nach unten abtragen. Dann construe-
ieren wir eine Sinuslinie, abermals von der halben
Schwingungsweite und Amplitude, deren erste Schwin-
gung wir nach oben abtragen u.s.w. Die Tangenten in
c an diese successiven Sinuslinien bilden mit der Ab-
scissenaxe abwechselnd Winkel $\pm \varphi_0$. Die Frage ist: Wel-
che Tangente hat der Limes C_∞, der offenbar die x-Axe
selbst ist? Die Frage verlangt offenbar, genau auf
die Reihenfolge der Grenzübergänge zu achten. Nicht
die Tangenten der einzelnen Hilfscurven $C_1, C_2 \ldots$ ge-
hen einem Limes entgegen (sie springen ja stets), son-
dern die Curven selbst haben ihrerseits einen Limes,
der im Punkte c eine bestimmte Tangente hat (natür-

lich die x-Axe). —

Wir wissen jetzt von unserer Kurve C_∞ (der Berührungspunkte c und deren Berührungstangenten), daß sie in allen Punkten c eine bestimmte Tangente hat. Damit ist aber C_∞ noch keineswegs eine analytische Curve. Wie überlegen wir uns so:

Es seien wieder 2 sich in c berührende Kreise (aus der Reihe der in unserer Figur auftretenden Kreise) gegeben. Zu denen construieren wir ein erstes Inversionsviereck. Nennen wir die 4 Berührungspunkte, die so hervorkommen, in der in der Figur angegebenen Weise c, c', c'', c''', so liegen diese auf einem Querkreise, wie wir wissen, der mit der Centralen in c den Winkel φ bildet.

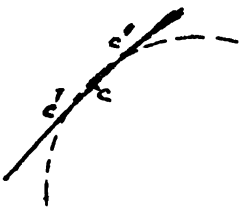


Sehe ich dabei von dem Punkte c''' ab, so haben wir

einen Kreis c, c', c'', der gegen die Centrale in c unter einem Winkel φ_0 geneigt ist. Wir wenden nunmehr auf unsere Figur die Operation S_1 an, wobei c, c', c'' auf c zurücken und der Kreis, der durch die jeweiligen Punktetripel bestimmt ist, mit der festbleibenden Centrale alternierend Winkel $\pm\varphi_0$ bildet. Aber alle diese Punkte c, c', c'' ... gehören der Punktmenge C_{00} an. Damit haben wir für letztere folgende Eigenschaft, die bei einer analytischen Curve (wie ich gleich zeige) nicht existieren kann:

Man kann in beliebiger Nähe einer gegebenen Contactstelle c noch auf unendlich viele Weisen 2 andere Stellen c', c'' so finden, dass der Kreis, der durch c, c', c'' geht, mit der Tangente in c den Winkel $\pm\varphi_0$ bildet.

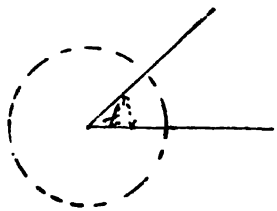
Dieses kann bei einer analytischen Curve in der That nicht vorkommen. Denn wenn man bei einer analytischen Curve 3 Punkte c, c', c'' durch einen Kreis verbindet und c', c'' auf c zurücken läßt, dann kommt ein bestimmter Limes heraus, nämlich der Krümmungskreis, der als solcher die Tangente in c berührt. Es ist ganz ausgeschlossen, daß unser Kreis hin und her springend einen endlichen Winkel $\pm\varphi_0$ mit der Tan-



gente einschliessen sollte. –

Immerhin ist nun aber unsere Punktmenge C_∞ eine Jordan-Curve, wie die oben aufgestellte, noch zu beweisende erste Behauptung lautete.

Wir werden von unserer Punktmenge C_∞ sagen, dass sie eine Jordan-Curve bildet, wenn wir ihre Punkte x, y ein-eindeutig durch stetige Funktionen φ und ψ der t-Werte eines Intervalls der t-Axe darstellen können. Dabei heisst die Zuordnung ein-eindeutig, wenn jedem Punkte des Intervalls ein Punkt der Menge und jedem Punkt der Menge rückwärts ein und nur ein Punkt des Intervalls entspricht.



Wenn wir t als Centriwinkel in einem Kreise deuten, wo dann das in Betracht kommende Intervall von t durch die Peripherie des Kreises gegeben sein mag, so können wir noch mehr geometrisch sagen:

Wir nennen eine Punktmenge eine Jordan-Curve, wenn sie ein-eindeutig und stetig auf die Punkte der Kreisperipherie abgebildet werden kann.

Dies Letztere kann nun bei unserer Menge C_∞ einfach in der Weise geschehen, dass wir die Figur von pg. 304 mit der Figur auf pg. 296 vergleichen.

Man ordne nämlich einfach die 4 Ecken des Ausgangsvierecks der einen Figur den 4 Ecken des Ausgangsvierecks der anderen Figur in cyklischer Reihenfolge zu und daran anschliessend die Ecken der Nebenvierecke hier den entsprechenden Ecken der gegen das Ausgangsviereck correspondierend gelegenen Nebenvierecke dort. Vermöge des so formulierten Gesetzes werden ersichtlich die einzelnen Punkte c der einen Figur ein-eindeutig den Punkten c der zweiten Figur zugewiesen. Zugleich ist die Zuordnung eine stetige, weil die correspondierenden Vierecke beiderseitig bei der Fortsetzung des Processes unendlich klein werden (d. h. kleiner als jede noch so kleine vorgegebene Kreisfläche). Den Verdichtungsstellen der Punkte c der einen Figur entsprechen also die Verdichtungsstellen der Punkte c in der anderen Figur. Aber die Punkte c in Figur auf pg. 296 füllen mit ihren Verdichtungsstellen den Orthogonalkreis gerade aus. Die Punktmenge C_∞ der Figur auf pg. 304 ist also ein-eindeutig und stetig den Punkten eines Kreises zugewiesen, womit der hier zu führende Beweis erbracht ist. Die Punktmenge C_∞ ist hiernach in der That eine Jordan-Curve. —

Ich habe mit der nunmehr beendigten Betrachtung unserer automorphen Figur gewisserma-

sen den Höhepunkt dieser Vorlesung in der idealistischen Discussion erreicht, und es mag daher geeignet erscheinen, von hier aus einen Umblick über das Resultat, welches sich ergeben hat, zu halten.

Ich habe, indem ich an die Theorie der automorphen Funktionen anknüpfte, durch einen rein-geometrischen Process unter Ausschaltung irgendwelcher arithmetischer Operationen zunächst eine bestimmte, nirgendwo dichte Punktmenge construiert und nun in Anlehnung hieran durch Specialisierung der Ausgangsfigur[1] eine nicht-analytische Curve hergestellt. Es geht sich also, daß diese modernen Ideen auch auf rein-geometrischem Wege hervorkommen und keine bloße Fiktion des Analysten sind. Ich gebe meiner allgemeinen Überzeugung in folgendem Satze Ausdruck:

Die modernen Fragen der Mengenlehre kommen überall heraus, wo man präcisionsmathematische Fragestellungen hinreichend weit verfolgt, man kann nicht umhin, auf sie einzugehen.

So ergiebt sich denn für die Geometrie (aber auch für alle anderen mathematischen Disciplinen, die mit der Raumanschauung zu thun haben) folgendes zweiteilige Programm, das meist nur einseitig

[1] Indem ich annahm, daß sich die 4 Ausgangskreise in cyklischer Reihenfolge berührten.

befolgt, oder doch in seiner Gliederung nicht klar erfaßt wird:

1/ die Approximationsmathematik als solche in's Auge zu fassen und zu cultivieren,

2/ auf der andern Seite aber vor keiner Idealisierung (im Sinne der Präzisionsmathematik) zurückzuschrecken.

Ich möchte sagen: Man soll das eine thun und das andere nicht lassen!

Ich exemplificiere, wie diese Auffassung in der theoretischen Mechanik zur Geltung kommt, derjenigen Wissenschaft, die die Raumanschauung zunächst der Geometrie am meisten verwertet.

Wir haben hier also die Fragen:

Was ist in der theoretischen Mechanik Approximationsmathematik, was ist Präzisionsmathematik, wieweit werden die zweierlei Betrachtungen in der Mechanik consequent verfolgt, wieweit unklar vermischt?

Es ergiebt sich die Zweiteilung:

a/ Man hat eine erste Art Darstellung der Mechanik, die an die Beobachtung anknüpfend nicht über die Grenzen des empirisch Gegebenen hinausgeht. Sie operiert nicht mit Massenpunkten, sondern klei-

von Körpern u.s.w. Man hat diese Tendenz, überall in den Naturwissenschaften nur das zu schildern, was unmittelbar zu beobachten ist, und keine Theorieen von dem zu bilden, was hinter der Erscheinung sein kann, den Namen „Phänomenologie" beigelegt! Indem ich diesen Ausdruck hier acceptiere, ist klar, daß die phänomenologische Mechanik ein Anwendungsgebiet der Approximationsmathematik ist. Wie dies im Einzelnen zu verstehen ist, ist aus unsern früheren Darlegungen klar. (Man wird nicht von strengen Grenzbegriffen reden, bei der Darstellung der Erscheinungen sich eventuell auf die linearen Glieder beschränken, weil so eine hinreichend genaue Annäherung an die Erscheinung gewonnen wird u.s.w.).

b) Daneben haben wir die idealistische Mechanik, wie ich sie nenne. Wir könnten sie auch als „Metaphysik" bezeichnen, indem wir dabei das Wort in seiner eigentlichen Bedeutung als „hinter der Physik" nehmen. Sie bildet sich mathematische Ideen, die über die Wahrnehmung hinausgehen, und sieht zu, wie man mit ihnen in vernünftiger Weise operieren kann. Man hat hier wirklich Massenpunkte, strenge Gesetze, nach denen diese Punkte aufeinander wirken, wirkliche Differentialquotienten u.s.w. Die

se idealisierte Mechanik gehört in das Gebiet der Präzisionsmathematik. Da darf man dann auch vor keiner Idealisierung zurückschrecken, man soll Punktmengen allgemeinster Art, nicht-analytische Curven u.s.w. in Betracht ziehen.

Statt die so getroffene Unterscheidung voranzustellen, ist in der Mechanik traditioneller Weise eine andere mathematisch-Behandlung üblich, die ein mixtum compositum von a/ und b/ ist. Sie ist darum üblich, weil man im 18ten Jahrhundert die Unterscheidung von Approximations- und Präzisionsmathematik noch nicht klar ausgeprägt hatte, und diese auch im 19ten Jahrhundert sich erst allmählich durchgerungen hat. Man läßt darum alle Funktionen eo ipso als analytisch gelten und alle Grenzübergänge als vertauschbar („wie es im Para diese war", Paul du Bois-Reymond).

Nun bin ich stets der Meinung gewesen, daß eine Vorlesung für Anfänger immer in dieser gewissermaßen unlogischen Weise gehalten sein muss, betone aber auf der anderen Seite, daß sobald ein reiferes Verständnis gewonnen ist, die zweite Behandlung d.h. die bewußte Trennung von Präzisions- und Approximationsmathematik auch bei den Vo-

klemen der Mechanik nicht unterlassen werden darf.

Wenn ich im Zusammenhange mit diesen Bemerkungen noch mit einem Worte auf die Behandlung der Mechanik in der Encyklopädie hinweisen darf, so ist klar, dass hier die moderne Auffassung (die ich für meine Person vertrete) nur beiläufig zur Geltung kommen kann. Denn die Referenten sollen über die vorhandene Litteratur, so wie sie vorliegt, berichten und dieselbe nicht in das Schema einer neuen und vielfach fremdartigen Auffassung eingwängen, wie denn überhaupt Zweck der Encyklopädie nur die Sammlung des Materials ist, damit die weitergehende Forschung späterhin nicht mehr, wie seither so oft, durch Unkenntnis des Vorhandenen beengt ist. –

Jedenfalls kommen wir dazu, von unserm Standpunkt aus auch für die Behandlung der Mechanik ein mathematisches Programm zu erfassen, welches ich hoffe in späteren Vorlesungen noch deutlicher hervorkehren zu können.

Nun muss ich hier im Zusammenhange aber noch erwähnen, dass es Mathematiker giebt, welche die Idealisierung noch weiter, als wir sie verstehen, treiben wollen.

Ich kehre hier zu der Präzisionsmathematik zurück und erwähne ein Buch, das bei seinem Erscheinen ein grosses Aufsehen erregte:

G. Veronese: Fondamenti di geometria, Padova 1891 (deutsch von Schepp, Leipzig 1894).

Veronese's Darstellung ist schwer zu lesen und vielleicht auch in den Einzelheiten nicht ganz einwandsfrei, aber ein jüngerer italienischer Mathematiker T. Levi Civitá hat in den Rend. della Accad. dei Lincei, Roma 1898 diesen Schaden geheilt.

Ich kann in folgender Weise über den Grundgedanken von Veronese Bericht erstatten.

Wir haben stets gesagt, dass für uns bei allen präzisionsgeometrischen Betrachtungen der moderne Zahlbegriff und die eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten der Geraden und den entsprechend definierten natürlichen Zahlen die Grundlage bildet.

Ob man die so bezeichnete Grundlage acceptieren will oder nicht, ist an sich keine mathematische Frage, sondern eine Frage der Zweckmäßigkeit. Die Mathematik (im engern Sinne) beginnt erst, wenn wir das Axiom (bezw. ein anderes) zulassen. Veronese acceptiert nun unser Axiom nicht.

Knüpfen wir vielleicht daran an, dass vermöge

der von uns acceptierten Festlegung des Zahlbegriffs $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ ist. Wenn wir dies ins Geometrische übersetzen, so heißt dies: In der Annahme, daß die Punkte der x-Axe und die natürlichen Zahlen sich entsprechen, liegt, daß der Punkt die Grenze eines unbegrenzt kleiner werdenden Segmentes ist. Dieses nun bestreitet Veronese. Für ihn bleibt ein stets kleiner werdendes Segment stets noch ein Segment, und in einem „aktual" unendlich kleinen Segment lassen sich ihm zufolge noch viele, sogar unendlich viele Punkte unterscheiden. Wo wir also bisher nur einen Punkt haben, hat Veronese noch unendlich viele Punkte. Er unterscheidet sie folgendermaßen:

Er denkt sich Symbole $\eta_1, \eta_2, \ldots$, die aktuel unendlich groß sind und mit denen sich in bestimmter Weise rechnen läßt*), dabei ist η_2 ω-mal größer als η_1 u.s.w. Er denkt sich ferner einen Ausdruck folgender Art gebildet, wo $a, a_1, \ldots$ natürliche Zahlen sind:

$$x = a + \frac{a_1}{\eta_1} + \frac{a_2}{\eta_2} + \cdots\cdots,$$

und dieser erst definiert ihm einen Punkt auf der Abscisenaxe. Ihm sind also unsere „rationalen" und „irrationalen Punkte auf der Abscisenaxe zusammengenommen noch nicht genug, vielmehr

*) Das Nähere siehe eben bei T. Levi-Civita.

schiebt er noch diese durch transfinite Größen $\eta_0, \eta_1, \ldots$ definierten Punkte ein. Ich gebe das Wesentliche noch einmal in einem bestimmten Satz:

Veronese nimmt an, daß ein Punkt x der Abscissenaxe erst festgelegt ist, durch einen Ausdruck:

$$x = a + \frac{a_1}{\eta_1} + \frac{a_2}{\eta_2} + \ldots ,$$

wo $a, a_1, a_2, \ldots$ natürliche Zahlen in dem uns geläufigen Sinne sind und $\eta_1, \eta_2, \ldots$ aktual unendliche Größen von bestimmter Größenordnung.

Die erste Frage, die sich hier erhebt ist: Kann man mit solchen Ausdrücken widerspruchsfrei operieren?

Darauf antworte ich:

Während die Darstellung bei Veronese selbst vielleicht nicht ganz präcis ist, hat Levi-Civitá gezeigt, daß man mit solchen Ausdrücken x in der That widerspruchsfrei rechnen kann, bei geeigneter Definition der Größen $\eta_0, \eta_1, \ldots$, sodaß vom abstrakt mathematischen Standpunkt aus nichts gegen die Sache einzuwenden ist.

Man kann aber weiter fragen:

Zugegeben, daß die Sache mathematisch zulässig ist, ist es darum auch zweckmäßig sich damit zu beschäftigen?

Damit kommen wir auf die allgemeine Frage:

Welche Fragestellungen sind in der Mathematik

überhaupt zweckmäßig?

Theoretisch kann ich natürlich jede Frage aufwerfen und niemand kann mir verbieten, mich mit ihr zu beschäftigen. In Wirklichkeit sind aber nur diejenigen zweckmäßig, die mit den anderen Fragen, mit denen ich mich ohnehin beschäftigen muß und mit denen man sich immer der Natur der Dinge entsprechend beschäftigt hat, zusammenhängen. Man kann darauf hinweisen, daß die Mathematik in dem durch diese Formulierung umgrenzten Gebiet genug der noch unerledigten Probleme vor sich hat und fragen, ob denn ein großer Teil unserer doch sehr beschränkten Arbeitsenergie darüber hinaus auf neue abstruse Dinge gerichtet werden soll. Vielleicht kann ich auch so sagen:

Sofern ein tiefes erkenntnistheoretisches Bedürfnis vorliegt, das befriedigt wird, wenn man die genannten transfiniten Zahlen studiert, so wird die Beschäftigung mit ihnen gerechtfertigt erscheinen; thut man es aber nur, um etwas Neues zu machen, dann kann die Erweiterung unmöglich wünschenswert sein.

Ich möchte hier noch auf ein Citat von G. Cantor hinweisen, der einmal sagt:

„Das Wesen der Wissenschaft liegt in ihrer Freiheit“ d.h. die Mathematik kann treiben, was sie will, wenn sie aus ihren Prämissen nur richtige Folgerungen zieht.

Indem ich diesen Cantor'schen Satz theoretisch acceptiere, füge ich eine praktische Einschränkung hinzu, die mir sehr wesentlich erscheint, nämlich dass jeder, der über Freiheit verfügt, auch eine Verantwortung trägt. Ich möchte daher nicht der absoluten Willkür bei der mathematischen Ideenbildung das Wort reden, sondern jedem anheimgeben, dass er dabei das Ganze der Wissenschaft im Auge halten soll.

Ich schliesse hiermit diesen kleinen Excurs und wende mich wieder dem complementären Gebiet zu.

II$_3$ Übergang zur praktischen Geometrie: a) Geodäsie

Wir sprachen in der letzten Zeit durchaus vom Präcisionsgeometrie. Nunmehr gehe ich im Gegensatze dazu zur eigentlichen

praktischen Geometrie

über, d.h. zu derjenigen Geometrie, die es mit der thatsächlichen Ausführung geometrischer Operationen zu thun hat.

Wir unterscheiden zwei Arten praktischer Trä-

tigkeit: Messen und Zeichnen (incl. Modellieren) und dementsprechend auch zwei Arten der praktischen Geometrie:

A) die Geodäsie (das Vermessungswesen),
B) die zeichnende Geometrie (darstellende Geometrie im weitesten Sinne des Wortes).

Unsere Hauptfrage wird sein: Wieweit ist in diesen Gebieten die Unterscheidung von Approximations- und Präzisionsmathematik bereits durchgeführt?

Hierauf gebe ich folgende generelle Antwort:

Die Geodäsie ist derjenige Teil der Geometrie, in welchem die Idee der Approximationsmathematik ihre klarste und consequenteste Durchbildung gefunden hat. Man discutiert bei ihr unausgesetzt einerseits die Genauigkeit der Beobachtungen und andererseits die Genauigkeit der Resultate, die aus ihnen folgen.

Dagegen ist die zeichnende Geometrie nach Seiten einer rationellen Lehre im Sinne der Approximationsmathematik noch wenig entwickelt. Man pflegt im allgemeinen darauf hinzuweisen, daß selbstverständlich Ungenauigkeiten unterlaufen, die auf ein Minimum zu reduzieren unerläßliche Aufgabe ist. Die Vorschrift lautet dann aber so:

„Reichne so genau wie möglich, aber traue dem Resultat so wenig wie möglich" (Finsterwalder).

Ich spreche nun zunächst von der Geodäsie indem ich mich dabei vielfach an die Vorträge anschliesse, die in dem parallellaufenden Seminar gehalten werden, doch so, dass die hier gegebene Darstellung auch Nichtseminarmitgliedern verständlich wird.

Ich beginne mit der niederen Geodäsie, in der es sich um Ausführung geradliniger Messungen von Dreiecken und Polygonen handelt. Wir überlegen uns, wie in die theoretische Behandlung der Messungen die Ideen der Approximationsmathematik hineinspielen.

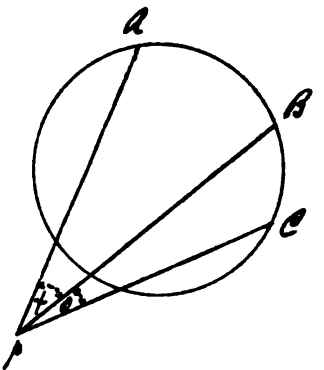
Unsere erste Überlegung muss die sein, dass alle Messungen, die hier in 2 Arten: Basis, und Winkelmessungen zerfallen, mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet sind, die in einer Reihe von Ursachen ihren Grund hat, auf die ich hier kurz hinweise, um Sie in dem ganzen Gedankenkreise zu orientieren.

Zunächst kommt die begrenzte Genauigkeit der Instrumente selbst in Betracht, insofern die benutzten Skalen (Strecken und Kreise) nur bis zu einer gewissen Grenze (bestimmten Anzahl Dezimalen, von Bruchteilen eines Millimeters bezw. einer Ki-

mute) genau geteilt sind. Des Weiteren sind aber die Skalen auch störenden Einflüssen, Temperaturänderungen, Durchbiegung infolge der Schwere, chemischen Umsetzungen der Metallegierung u.s.w. ausgesetzt. Dazu kommen drittens die störenden subjektiven Einflüsse, die den Beobachter treffen, indem die in der Astronomie sogenannte „persönliche Gleichung" hier eingreift. Schliesslich sind auch die zu messenden Dinge nicht scharf gesehen, insofern die Visierlinien d.h. die Bahnen der Lichtstrahlen, soweit atmosphärische Strahlenbrechung in Betracht kommt, keine gerade Linien sind u.s.w.

Durch derartige lästige Umstände kommt es heraus, dass die Messungen nicht genau sind. Wie gross der jeweilige Spielraum ist, innerhalb dessen die einzelne Messung unbestimmt bleibt, mag weiterhin erwogen werden. Fragen wir uns vorab, wie weit aus Daten, die bestimmte Genauigkeit haben, andere Grössen berechnet werden können, insbesondere welche Genauigkeit diese zu berechnenden Grössen haben werden.

Hierüber kann man zunächst rein theoretische Untersuchungen anstellen, und es ist im Seminar als typisches Beispiel die in der Geodäsie sogenannte Pothenot'sche Aufgabe zur Behandlung gekommen.



Ich kann sie kurz so charakterisieren: Gegeben sind 3 feste Punkte A, B, C (z. B. 3 Leuchttürme an der Küste), die Aufgabe ist, die Lage eines anderen Punktes p (Schiff auf dem Meere) dadurch zu bestimmen, daß man von p nach A, B, C visiert und so die beiden Winkel ApB und BpC mißt. Das theoretische Problem würde sein:

Wie genau ist p durch die beiden Messungen bestimmt, sofern man jeder einzelnen Winkelmessung die gleiche Ungenauigkeit zuschreibt?

Da wird nun ein Umstand besonders maßgebend, der hervortritt, wenn p auf dem durch die 3 Punkte A, B, C gehenden Kreise liegt. In diesem Falle sind die beiden Winkel φ und ψ für jede Lage von p auf dem Kreise gleich. Man kann also durch Angabe der beiden Winkel φ und ψ p in diesem Falle überhaupt nicht festlegen, vielmehr kann es auf dem betreffenden Kreise eine ganz beliebige Lage einnehmen. Wir drücken dies so aus:

Es giebt beim Pothenot'schen Problem einen gefährlichen Kreis, nämlich den Kreis, der durch A, B, C geht.

Wenn Sie dies überlegen, daß ein solcher Unbestimmt

heitskreis existiert, dann verstehen Sie, wie eine kleine Ungenauigkeit in der Messung der Winkel für einen Punkt p', der nahe diesem Kreise liegt, verhängnisvoll werden kann. Die Winkel φ und ψ für die in der Nähe des Kreises gelegenen Punkte sind nahezu dieselben, also eine Ungenauigkeit bei ihrer Messung für die Bestimmung des Punktes sehr fatal. Wir kommen hier also zu folgendem Schlusse:

In der Nähe des gefährlichen Kreises wird durch kleine Ungenauigkeiten der Messungen die theoretische Lage des Punktes ausserordentlich stark beeinflusst.

Indem ich wegen der Einzelheiten auf den Vortrag im Seminar*) verweise, äussere ich mich folgendermassen:

Wenn man annimmt, dass die Winkel φ und ψ, die man direkt von p aus misst, allemal mit derselben Ungenauigkeit behaftet sind, dann wird die Lage des Punktes p gegen die Punkte A, B, C in den verschiedenen Fällen verschieden genau festgelegt sein: ganz schlecht, wenn man in der Nähe des gefährlichen Kreises ist, wesentlich besser, wenn man fern davon ist. Man kann geradezu Curven gleicher Genauigkeit zeichnen, die die ganze Ebene überdecken, sodass 2 Punkte p und p', die auf derselben Genauigkeitscurve liegen,

*) Vgl. auch W. Jordan: Handbuch der Vermessungskunde. 2 Bde. 3te Aufl. Stuttgart 1888

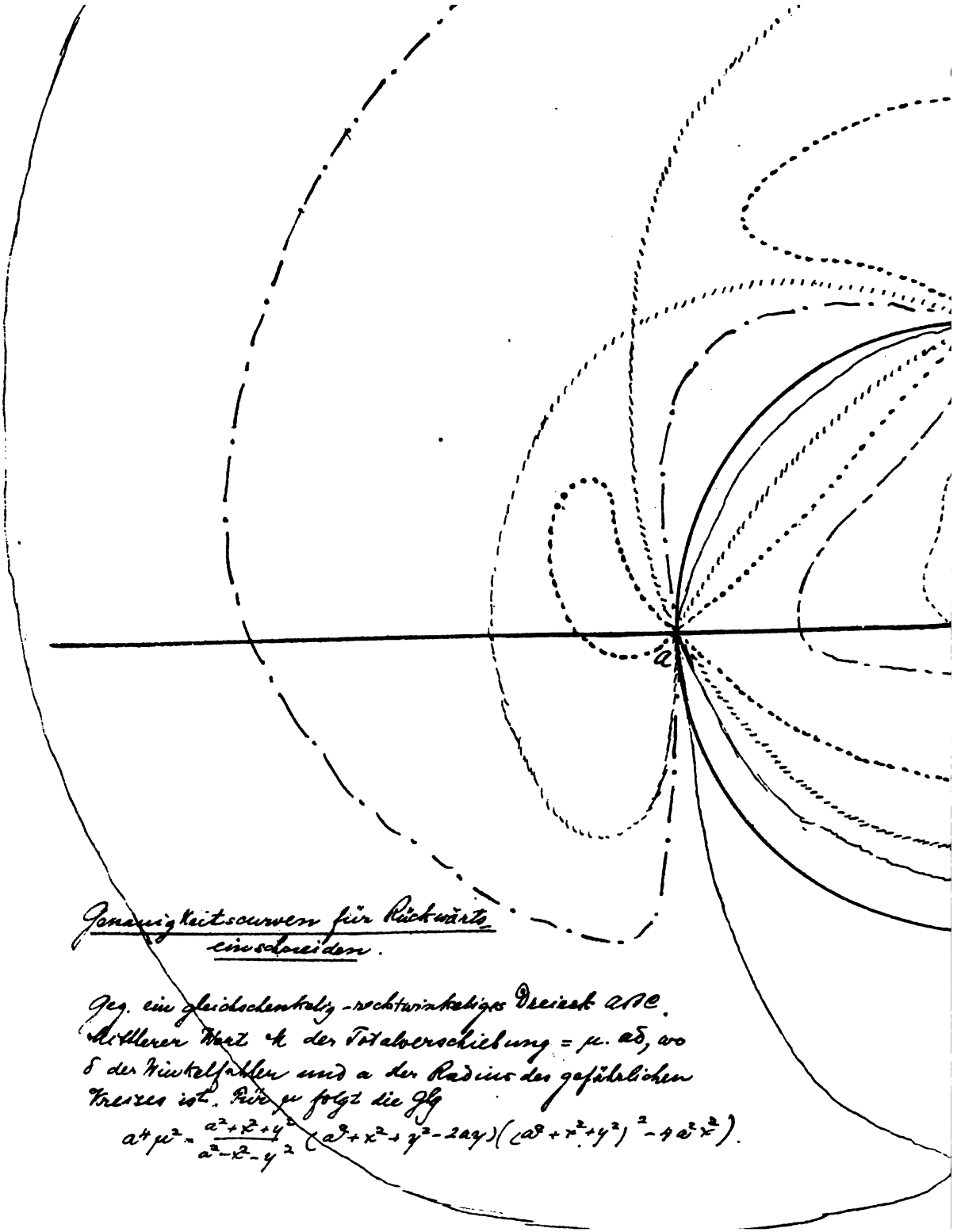
durch Messung der Winkel φ, ψ mit gleicher Genauigkeit bestimmt sind. Diese Genauigkeitscurven haben nach den Entwickelungen von Jordan die auf der beigefügten Figur verzeichnete Gestalt.

Die so für das Bothonot'sche Problem erläuterte Aufgabe kehrt natürlich bei jeder Aufgabe der Geodäsie wieder. Dabei ist noch völlig unbestimmt gelassen, wie genau die Winkel φ und ψ gemessen werden können.

Wie werden wir nun über diese Genauigkeit ein Urteil gewinnen? Dies ist die weitere wichtige Frage. Ich sage so:

Um ein gewisses Urteil über die Unsicherheit unserer Messungen zu gewinnen, ist der rettende Anker die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie in der Methode der kleinsten Quadrate ausgebildet vorliegt.

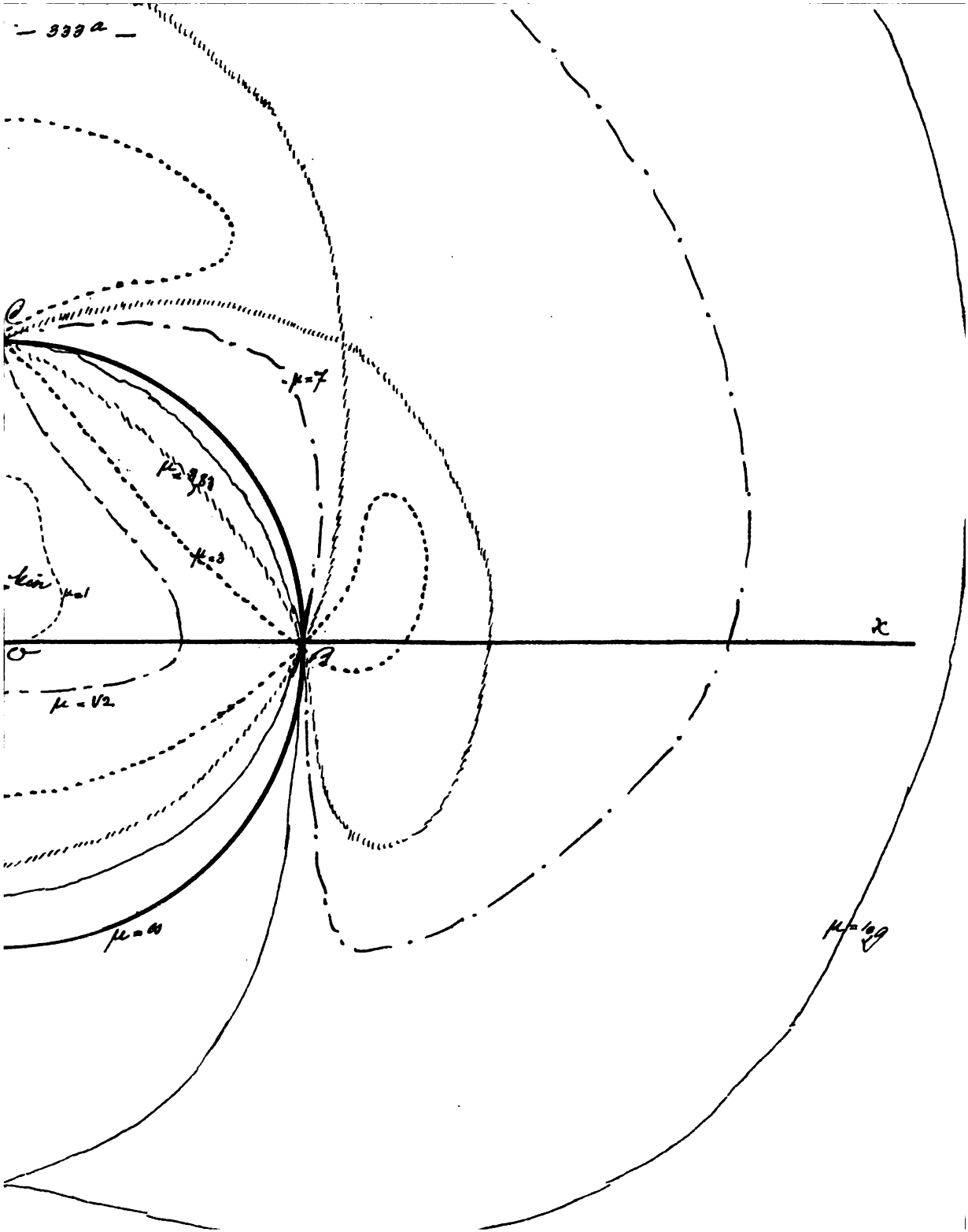
Man sagt so: Man messe mehr Größen als erforderlich sind zur Bestimmung des Resultates und sehe zu, wieweit diese Messungen, die sich gewissermaßen controllieren, mit einander stimmen. Aus der Art und Weise, wie sie miteinander stimmen, gewinnt man einen gewissen Wahrscheinlichkeitsinhalt dafür, wie genau die Messungen im Einzelnen sind und welchen Spielraum man also dem Resultate vernünftiger Weise belassen soll.



Genauigkeitscurven für Rückwärts-einschneiden.

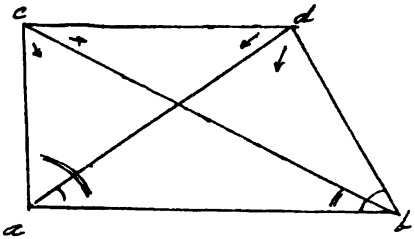
Geg. ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck ABC. Mittlerer Wert M der Totalverschiebung $= \mu \cdot a\delta$, wo δ der Winkelfehler und a der Radius des gefährlichen Kreises ist. Für μ folgt die Glg

$$a^4\mu^2 = \frac{a^2+x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}\left(a^2+x^2+y^2-2ay\right)\left((a^2+x^2+y^2)^2-4a^2x^2\right).$$


μ=7
μ=3,89
μ=3
μ=1
x
μ=√2
μ=∞
μ=1,09

Ich erläutere dies, indem ich auch hier an ein bestimmtes, im Seminar behandeltes Beispiel anknüpfe.

Es handele sich darum, ein Viereck festzulegen, von dem die Basis ab gegeben sei (die Frage nach der Genauigkeit der Basismessung soll hier also unerörtert bleiben). Man kann durch



je 2 Winkelmessungen in a und b die Punkte c und d bestimmen. Man fügt nun aber, indem man sich nach c und d mit dem Instrumente begiebt, noch die Messungen der 4 mit einem Pfeil markierten Winkel hinzu, sodaß man im ganzen 8, statt der 4 notwendigen Winkel hat. Wir fragen dann zunächst, wie genau sind die geometrischen Bedingungen, die zwischen diesen Winkeln aus der Figur bestehen müssen, erfüllt?

Offenbar müssen zwischen diesen 8 Winkeln 4 Bedingungsgleichungen bestehen. Diese stimmen aber, wenn man die gemessenen Winkel einträgt, nur bis auf gewisse Fehler. Man sagt dann, daß in der Messung der 8 Winkel 8 „Fehler" vorgekommen sind, und daß allgemein übliche Verfahren ist dann bekanntlich dies, die überzähligen Messungen so zu corrigieren, daß

erstlich die theoretisch vorhandenen Bedingungsgleichungen genau erfüllt werden und dass zweitens die Quadratsumme der an den Messungen anzubringenden Correkturen ein Minimum wird.

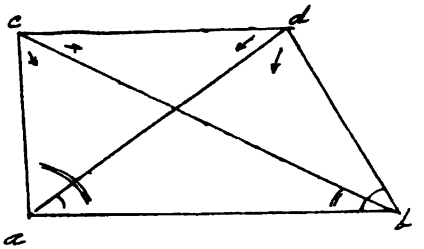
Die Begründung dieser Methode der kleinsten Quadrate, die in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört, fällt aus dem Rahmen dieser Betrachtung heraus, wir fahren gleich fort, ihre Anwendung zu besprechen.

Gesetzt wir haben durch Anwendung der Methode zwei bestimmte Lagen für c und d erhalten. Sind dies dann die wirklichen Lagen? Das wäre eine wunderbare Methode, die aus schlechten Beobachtungen richtige Resultate abzuleiten gestattete. So ist die Methode der kleinsten Quadrate nicht aufzufassen. Die Sache ist vielmehr diese:

Nachdem wir die „wahrscheinlichste" Lage für c und d gefunden haben, müssen wir nun weiter an der Hand der Methode der kleinsten Quadrate den Genauigkeitsgrad von c und d discutieren (wobei natürlich bei der Definition des Genauigkeitsgrades eine gewisse Willkür bleibt; man spricht vom mittleren Fehler, wahrscheinlichen Fehler u.s.w.). Die Folge ist, dass um die gefundenen c und d je ein elliptisches Gebiet resultiert, und dass man mit einem

Ich erläutere dies, indem ich auch hier an ein bestimmtes, im Seminar behandeltes Beispiel anknüpfe.

Es handele sich darum, ein Viereck festzulegen, von dem die Basis ab gegeben sei (die Frage nach der Genauigkeit der Basismessung soll hier also unerörtert bleiben). Man kann durch



je 2 Winkelmessungen in a und b die Punkte c und d bestimmen. Man fügt nun aber, indem man sich nach c und d mit dem Instrumente begiebt, noch die Messungen der 4 mit einem Pfeil markierten Winkel hinzu, sodass man im ganzen 8, statt der 4 notwendigen Winkel hat. Wir fragen dann zunächst, wie genau sind die geometrischen Bedingungen, die zwischen diesen Winkeln aus der Figur bestehen müssen, erfüllt?

Offenbar müssen zwischen diesen 8 Winkeln 4 Bedingungsgleichungen bestehen. Diese stimmen aber, wenn man die gemessenen Winkel einträgt, nur bis auf gewisse Fehler. Man sagt dann, dass in der Messung der 8 Winkel 8 „Fehler" vorgekommen sind und dass allgemein übliche Verfahren ist dann bekanntlich dies, die übergähligen Messungen so zu corrigieren, dass

erstlich die theoretisch vorhandenen Bedingungsgleichungen genau erfüllt werden und dass zweitens die Quadratsumme der an den Messungen anzubringenden Correkturen ein Minimum wird.

Die Begründung dieser Methode der kleinsten Quadrate, die in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört, fällt aus dem Rahmen dieser Betrachtung heraus, wir fahren gleich fort, ihre Anwendung zu besprechen.

Gesetzt wir haben durch Anwendung der Methode zwei bestimmte Lagen für c und d erhalten. Sind dies dann die wirklichen Lagen? Das wäre eine wunderbare Methode, die aus schlechten Beobachtungen richtige Resultate abzuleiten gestattete. So ist die Methode der kleinsten Quadrate nicht aufzufassen. Die Sache ist vielmehr diese:

Nachdem wir die „wahrscheinlichste" Lage für c und d gefunden haben, müssen wir nun weiter an der Hand der Methode der kleinsten Quadrate den Genauigkeitsgrad von c und d discutieren (wobei natürlich bei der Definition des Genauigkeitsgrades eine gewisse Willkür bleibt; man spricht vom mittleren Fehler, wahrscheinlichen Fehler u.s.w.). Die Folge ist, dass um die gefundenen c und d je ein elliptisches Gebiet resultiert, und dass man mit gro-

licher Sicherheit sagen kann, daß die wahren c und d innerhalb der beg. Gebiete liegen. Es kommt also noch die Kunst hinzu, das Resultat der Methode der kleinsten Quadrate jeweils richtig zu beurteilen.

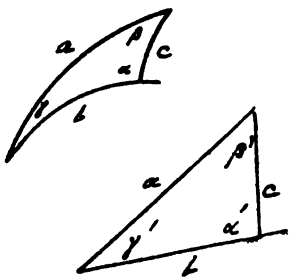
Sie sehen, es handelt sich um eine systematische Lösung bestimmter approximationsmathematischer Aufgaben. c und d genau zu bestimmen, ist gar nicht das Problem; sondern die Frage ist, was ihre ungefähre Lage ist, beg. in welchem Bereiche dieselbe unbestimmt bleibt. Die Methode der kleinsten Quadrate lehrt uns diese Fragen der Approximationsmathematik in bestimmter Weise anzusetzen.

Als weiteren wichtigen Punkt berühre ich hier die Frage nach der Art des numerischen Rechnens, welches man bei solchen Approximationsfragen anzuwenden hat. Wenn man 1 m nur bis auf 1/100 mm genau gemessen hat, dann hat es keinen Zweck, das Resultat auf 7 Dezimalen genau anzugeben. Ich stelle daher als erste Regel hier auf:

Bei der numerischen Durchführung der in Betracht kommenden Rechnungen wird man stets die abgekürzte Rechnung benutzen, die nur mit so viel Ziffern operiert, als nach der Lage der Sache Bedeutung haben.

Für die Vereinfachungen der Rechnung, welche von hier aus gegebenenfalls resultieren, wurde im Seminar ein interessantes Beispiel, der sog. Legendre'sche Satz aus der sphärischen Trigonometrie behandelt.

Es handelt sich dabei um die Beziehungen, in denen ein sphärisches Dreieck zu einem ebenen mit denselben Seiten a, b, c steht. Der Legendre'sche Satz besagt, daß 2 solche Dreiecke, solange man es mit einem kleinen" sphärischen Dreieck zu thun hat, Winkel haben, welche je um den 3ten Teil des sphärischen Excesses" bezw. von einander verschieden sind. Also:



$\alpha' = \alpha - \varepsilon/3$, $\beta' = \beta - \varepsilon/3$, $\gamma' = \gamma - \varepsilon/3$, wo $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$.

Auf den Beweis, der mit Reihenentwickelungen zu führen ist[1] und im Seminar vorgetragen wurde gehe ich nicht ein, ebensowenig auf die ebenfalls im Seminar behandelte Fehlerschätzung. Sie sehen jedenfalls, wie bequem der Satz ist (da man viel leichter mit den Formeln der ebenen, als der sphärischen Trigonometrie operiert). Ich resumiere so:

Der Legendre'sche Satz ist für die Zwecke des numerischen Rechnens eine große Erleichterung, und

---

[1] von denen nur die niedersten Glieder beibehalten werden.

ich gebe diesen Satz als ein typisches und elegantes Beispiel dafür, was Approximationsmathematik ist.

Zuletzt mögen noch einige historische Bemerkungen Platz finden:

In der Geodäsie ist die Methode der kleinsten Quadrate und die abgekürzte Rechnung, der Legendre'sche Satz u.s.w. ungefähr seit dem Anfang des vorigen Jahrhunderts durchweg üblich. Speziell ist es Gauß, der diesen Methoden ihre theoretische Abrundung gegeben hat, und ich will nicht unterlassen, hier ein Dictum zu citieren, das Hauck auf der Münchener Naturforscher-Versammlung (1899) gab:

„Jeder Geodät ist mit einem Propfen Gauß'schen Öls gesalbt",

d.h. er hat darüber nachgedacht, was Approximationsmathematik ist, und wie er vernünftiger Weise das empirische Material der mathematischen Behandlung unterwirft.

Dieser Propfen ist aber der reinen Mathematik seit ungefähr 1860 verloren gegangen. Seit 1860 wendet sich, nach dem Vorbild von Jacobi, Gauß, Poisson, Cauchy u.s.w, die reine Mathematik von diesen Dingen ab, als ob es etwas Inferiores wäre. In dieser Hinsicht giebt gerade der besprochene Legen-

dre'sche Satz ein vorzügliches Beispiel. Legendre hat seinen Satz ursprünglich in sein (auch heute noch überall verbreitetes) Lehrbuch der Geometrie aufgenommen. In der neuen Auflage dieses Lehrbuches aber ist er weggelassen, trotzdem die sphärische Trigonometrie als solche ausführlich behandelt wird.[1]

Soviel über die niedere Geodäsie. Jetzt wende ich mich zur höheren Geodäsie.

Hier wird die Erdoberfläche als Kugel, oder genauer als ein Ellipsoid betrachtet und es handelt sich vor allem darum, auf dem Ellipsoid die geodätischen Linien zu ziehen. Wir werden fragen, wieweit die Erdoberfläche einem Ellipsoid entspricht und wie trotz der unendlichen Discontinuitäten der Oberfläche (Berg, Thal, Wald u. Wiese) es möglich ist, den Gedanken der auf dem Ellipsoid verlaufenden geodätischen Linie festzuhalten.

Was ich da zu sagen habe, klingt sehr trivial und fast selbstverständlich, weil jeder es sofort für richtig hält und die Praktiker auch unbewusst

---

[1] Ein anderes charakteristisches Beispiel dafür, wie der Sinn für approximationsmathematik in den letzten Decennien bei den reinen Mathematikern successive verschwunden ist, gibt der Umstand, daß die modernen Lehrbücher der Analysis die Differenzenrechnung, der man früher hohen Wert beimaß, fast gar nicht mehr berühren.

dementsprechend handeln. Es ist aber wesentlich, daß man sich die Dinge einmal bewußt klar macht, so daß man gegebenenfalls nicht mit Argumenten der Präzisionsmathematik kommt, die als solche hier nicht ausreichen.

Wie ist zunächst die präcise Definition der geodätischen Linie auf einer idealen Fläche?

Bekanntlich hat man 2 Definitionen:

Einmal betrachtet man die Bogenlänge

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

und verlangt, daß diese zwischen 2 zu verbindenden Grenzpunkten ein Minimum wird.

Das andere Mal betrachtet man die Osculationsebene der Curve und verlangt, daß diese senkrecht zur Tangentialebene der Fläche steht.

Bei beiden Definitionen wird von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht, und diese gründet, wie wir wissen, sich nach der modernen Lehre auf den strengen Grenzbegriff: dx, dy, dz sind nicht kleine Größen, sondern verschwindende Größen. Die Frage ist jeweils, was aus den durch die Formeln angedeuteten Beziehungen im Limes wird. Indem ich in üblicher Weise die dx, dy, dz in diesem Sinne als unendlich kleine Größen bezeichne, haben wir hier als obersten

Satz:

Bei der präcisen Definition der geodätischen Linie muss eine exakt definierte Idealfläche gegeben sein und dann bedeuten dabei die dx, dy, dz unendlich kleine Grösen, nicht etwa sehr kleine Grösen.

Nachdem wir uns dies vergegenwärtigt, vergleichen wir die Erdoberfläche mit einem Ellipsoid, und zwar hinsichtlich ihrer Eigenschaften im Unendlich-Kleinen. Natürlich kann man im Grosen die Erdoberfläche mit einem Ellipsoid vergleichen, wie die Arbeiten der Geodäten dargethan haben, vergl. z. B. die neueste Publikation von F. Börsch[1] in der von der Vergleichung von Mitteleuropa, als des best vermessenen Teils der Erdoberfläche, mit einer Ellipsoidschale gehandelt wird. Aber im Kleinen (nicht nur im sehr Kleinen) stimmt das gar nicht. Wollen wir z. B. eine Tangentialebene an die Erdoberfläche legen, so muss gemäss den Ideen der Präcisionsmathematik verlangt werden, die kleinsten Variationen der Oberfläche in Betracht zu ziehen. Da ist aber gar keine glatte Fläche vorhanden; der ganze Verlauf ist höchst irregulär. Wenn wir nur die kleinen Dimensionen in Betracht ziehen, die man sieht (Unterschied von Berg und Tal, Unregelmäßigkeiten der

[1] Bericht über die Lotabweichungs-Bestimmungen, Verhandl. d. intern. Erdmessung, Stuttgart 1898

Bodenfläche, wechselnde Vegetation u.s.w.), so wird einem die Unmöglichkeit der Sache schon klar. Wieviel mehr, wenn wir noch weiter gehen (wie das doch die strenge Definition verlangt) und genötigt sind, den geologischen Aufbau der Organismen, ja den molekularen Struktur der Materie zu berücksichtigen. Da ist von einem übersichtlichen Gesetz überhaupt keine Rede, nicht einmal von einer strengen Fläche, sondern nur von einer Raumschicht, deren Querdimension gegen ihre sonstige Ausdehnung zurücktritt. Wir müssen sagen:

Wenn wir die Erde mit einem Ellipsoid vergleichen, so bezieht sich das gar nicht auf die Differenzenquotienten bei kleinen Differenzen, geschweige denn auf die Differentialquotienten (die wir als Limiten der Differenzenquotienten auffassen).

Und ich fahre fort, um es noch etwas lebendiger zu fassen:

Praktisch ist das, was Oberfläche heißen soll, überhaupt nicht exakt definiert, weil nicht feststeht, welche Teile wir zur Erdmasse hinzuzählen sollen. Jedenfalls aber werden, wenn wir Differenzenquotienten in kleinen Dimensionen bilden, diese auf d.s Äußerste hin und her schwanken.

Sie sehen, wie wir die Annäherung an ein Ellipso-

id jedenfalls nicht auffassen dürfen. Im sehr kleinem stimmt es nicht. Es stimmt aber, wie ich behaupte, angenähert, wenn wir den Differenzen, die in den Differenzenquotienten auftreten, eine bestimmte Größenordnung vorschreiben.

Wir denken uns ein flaches Terrain (ein gebirgiges würde die Sache complicieren), in dem wir einen scharfen Horizont etwa auf 10 km. zu sehen glauben. Die Ebene, die wir dann durch das Auge parallel zum Horizonte legen, dürfen wir mit der Tangentialebene des Ellipsoids vergleichen. Allgemeiner werden wir sagen:

Wenn wir bei der praktischen Bestimmung (von der jetzt im Zusammenhang mit der geodätischen Linie des Ellipsoides gehandelt werden soll) im Großen Δx, Δy, Δz und deren Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ einführen, so denken wir uns die Δx, Δy, Δz, oder vielmehr $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, als Stücke von etwa 10 km Länge. Die dann entstehenden Differenzenquotienten können als Annäherung an die Differentialquotienten des Ellipsoids gelten (in demselben Sinne wie die Tangentialebene des Ellipsoids annähernd durch die Horizontlinie, die wir beobachten, gegeben ist).

Für ein gebirgiges Terrain müssen wir natürlich vorab eine Ausgleichung oder Nivellierung der Berge

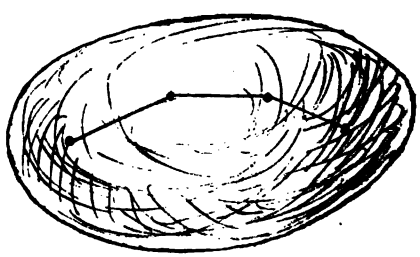
und Thäler voraussetzen, um in ähnlicher Weise die Verhältnisse zu entwickeln.

Dies stimmt alles mit dem, was ich früher bei der gezeichneten Curve ausführte, daß wir, wenn wir bei einer solchen Curve von einer Tangente reden, diese nicht schlechtweg durch den Differenzenquotienten (oder gar Differentialquotienten, den es gar nicht giebt), sondern durch den Differenzenquotienten bei bestimmter Größenordnung der Differenzen beurtheilen, u.s.w.

Nachdem wir uns hierüber geeinigt, fragen wir, was denn die geodätische Linie auf dem Ellipsoid für die praktischen Messungen nützt. Daß wir eine geodätische Linie auf dem Ellipsoid nicht mit der kürzesten Linie vergleichen können, die wir uns auf der Erdoberfläche empirisch herstellen, indem wir alle dort erkennbaren Details in Betracht ziehen, ist klar.

Vielmehr glaube ich Ihnen folgende Formulierung vorschlagen zu sollen, die genau dem entspricht, was die Geodäten wirklich machen.

Ich will neben das Wort „geodätische Linie" das Wort „geodätisches Polygon" stellen. Dabei mag unter einem geodätischen Polygon einer gege-



benen Fläche ein der Fläche einbeschriebenes geradliniges Polygon von gegebener Größenordnung der Seiten verstanden sein, welches im übrigen geodätisch ist d.h. es soll das kürzeste Polygon seiner Art zwischen den beiden betrachteten Endpunkten sein, oder die Osculationsebene in den Eckpunkten des Polygons soll gegen die Tangentialebene der Fläche in den Eckpunkten jeweils senkrecht stehen.

Ein solches geodätisches Polygon denken wir uns nun zuerst beim idealen Erdellipsoid. Dabei wählen wir die Seitenlänge gleich 10 km. Wir erhalten so ein ganz bestimmtes Polygon, dessen Betrachtung in das Gebiet der reinen Mathematik gehört, indem wir ja bei seiner Definition von ganz bestimmten Voraussetzungen ausgehen.

Auf der andern Seite hat es gar keine Schwierigkeit auf der empirischen Erdoberfläche, natürlich mit der Genauigkeit, die durch die Verhältnisse gegeben ist, ein geodätisches Polygon, dessen Seiten etwa je 10 km messen, thatsächlich herzustellen. Man hat nur von einem Punkte nach dem andern zu visieren und dafür zu sorgen, daß die Ebene zweier von demselben Eckpunkte auslaufenden Visierlinien stets senkrecht auf der Tangentialebene steht, die uns

durch den Horizont definiert ist.

Und nun ist die Meinung der Geodäten, worin sie zweifellos recht haben, zunächst die, daß ein solches empirisches Polygon mit dem theoretischen Polygon beim Ellipsoid nahezu zusammenfällt. Die Entscheidung hierüber müssen wir durchaus den Geodäten überlassen. Des Weiteren aber postulieren sie stillschweigend einen Satz der reinen Mathematik, der besagt, daß das betr. Polygon beim idealen Ellipsoid als eine Annäherung an die geodätische Linie des idealen Ellipsoids aufgefaßt werden kann. Dies ist ein Theorem der Approximationsmathematik, welches zu prüfen in unsere Domäne fällt. Daher sage ich so:

Damit von rein mathematischer Seite alles bereit gestellt ist, was die Geodäten gebrauchen, genügt es nicht, die geodätischen Linien auf dem Erdellipsoid an der Hand der modernen Differential- und Integralrechnung durch strenge Grenzforderungen zu definieren, sondern man muß noch abschätzen, wieviel eine solche geodätische Linie in ihrem Verlaufe abweicht von einem geodätischen Polygon von ca. 10 km. Seitenlänge, das man dem idealen Erdellipsoid einbeschrieben mag.

Da wäre also die Frage: Ist dies irgendwo in der

Litteratur behandelt oder nicht, so daß sich auch hier wieder eine bedauerliche Divergenz zwischen den Leistungen der Theorie und den Anforderungen der Praxis ergeben würde? Hierauf ist zu antworten, daß die Sache allerdings vorhanden ist, aber nicht unter den Gesichtspunkten, die uns hier interessieren, sie sollte eigens für die vorliegenden Zwecke dargestellt werden.

Damit berühre ich folgendes:

Ich fasse die Sache etwas allgemeiner und spreche überhaupt von Curven, die durch Differentialgleichungen definiert werden, wobei ich mich der bequemen Ausdrucksweise wegen auf Differentialgleichungen 1ter Ordnung mit 2 Variablen beschränke: $y' = \varphi(x,y)$.

Nach Cauchy kann man dann auf die Existenz eines Integrals der Differentialgleichung schließen, indem man sich ein Polygon von Elementen x, y, y' konstruiert, die der vorgelegten Gleichungen genügen, und sich überzeugt, daß ein Limes dieses Polygons bei wachsender Seitenzahl unter gleichzeitiger Verkleinerung der Seiten existiert.

Bei diesem Gedankengange von Cauchy ist nun das, was wir suchen, implicite vorhanden, aber in eine an

dere Beleuchtung gerückt:

Cauchy gebraucht den Vergleich zwischen der Curve und den Polygonen, das soll heißen die Abschätzung der Unterschiede, die zwischen Curve und Polygon vorhanden sind, um daraus auf die Existenz der Integralcurve zu schließen. Wie dagegen werden dieselben Abschätzungen benutzen wollen, um daraus die Berechtigung abzuleiten, (für unsern speziellen Fall gleich ausgesprochen) das empirische geodätische Polygon auf der empirischen Erdoberfläche nicht durch das theoretische geodätische Polygon, sondern durch die geodätische Linie des Erdellipsoids approximativ darzustellen! Ich sage überhaupt:

Was wir für den speziellen Fall aussprachen, trifft allemal zu, wenn es sich darum handelt, Dinge der empirischen Welt mit der auf den exakten Grenzbegriff gestützten Differential- und Integralrechnung zu behandeln. Oder noch bestimmter:

Dieser Gedankengang ist notwendig, um die reine Mathematik in ihrer modernen Form, wo die Differential- und Integralrechnung auf den genauen Grenzbegriff gegründet ist, mit den Anwendungen in Contakt zu halten. Das Bindeglied ist dasjenige Kapitel der Approximationsmathematik, das

in den letzten Decennien so vernachlässigt ist, eine rationell entwickelte Differenzenrechnung.

Im einem Anhange spreche ich nun noch von der sog. Geoidfläche.

Bei dem Geoid handelt es sich um die Niveauflächen der Schwere, und zwar stellt sich der Ansatz nach der Lehre von der Newton'schen Anziehung so dar:

Wir haben ein Potential

$$\int \frac{\varrho\, dk}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

das Integral erstreckt über alle Massenteilchen $\varrho\, dk$, resp. Volumteilchen dk der Erdmasse. Der 2te Term tritt infolge der Winkelgeschwindigkeit ω, mit der die Erde um ihre Axe, die wir mit der z-Axe zusammenfallen lassen, hinzu (= Potential der Centrifugalkraft). Setzen wir nun diesen Ausdruck gleich V, so giebt uns $V = \text{const}$ die Niveauflächen der scheinbaren Schwere (die aus Centrifugalkraft und wahrer Schwere zusammengesetzt ist). Man bekommt die Kraftcomponenten dieser scheinbaren Schwere, wenn man setzt:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Für die Gestalt dieser Niveauflächen $V = \text{const}$ hat man nun den Namen „Geoid" eingeführt (abgeleitet von $\gamma\tilde{\eta}$). Natürlich giebt es entsprechend den verschiedenen Werten der Constanten eine ganze Schar Geoidflä-

den, unter denen man eine, die durch einen festgewählten Punkt (Nullpunkt des Pegels von Amsterdam) geht, als Hauptfläche zählt.

Die Frage ist: Wie verlaufen die Geoidflächen, was weiß man von ihnen, was kann man von ihnen wissen?

Hier muß ich zunächst über ein Resultat der neueren Messungen berichten, durch welches frühere Annahmen corrigiert wurden.

Indem man früher eine gleichmäßige Verteilung der Massen im Erdinnern voraussetzte und dann die in den sichtbaren Erdteilen aufgehäuften Massen neben den Wassermassen der Oceane rechnerisch in Betracht zog, fand man, daß sich die Geoidflächen über den Continenten und Gebirgen stark in die Höhe wölbten. Man hat Erhöhungen von 200 – 400 m. herausgerechnet, vergl. z. B.

Helmert: die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Leipzig 1880/84

Hierin rechnet Helmert z. B. für die Peripherie von Süd-Amerika aus der genannten Annahme eine starke Lotabweichung heraus, die nach dem Continente zu stattfindet, so daß die Niveauflächen, die doch senkrecht zu diesen Richtungen stehen muß, sich empor-

hebt, was im Ganzen eine Erhöhung von 440 m ergiebt.

Die neueren Messungen über die Intensität der Schwerkraft aber haben gezeigt, dass die hierbei zugrunde gelegte Annahme durchaus falsch ist, dass vielmehr im allgemeinen unterhalb der Continente und grossen Gebirge sich Massendefekte befinden, durch welche das Mehr der Masse, welches nach aussen hervorragt, compensiert wird. Man hat sich da natürlich keine Höhlungen zu denken, sondern leichtere Gesteinsmassen, so dass es ungefähr so ist, als befänden sich die sichtbaren Massen der Erdoberfläche auf einer flüssigen Unterlage in hydrostatischem Gleichgewicht.

Dies ist das allgemeine Resultat, das allerdings im Einzelnen die mannigfachsten Abänderungen erfahren kann. Jedenfalls aber erscheint infolge dieser neuen Untersuchungen die Geoidfläche vielmehr abgeglichen, als man vor 20 Jahren voraussetzte. Sie weicht allerdings gelegentlich um viele Meter von der theoretischen Ellipsoidfläche ab, aber dies gerade in Gegenden, wo man es am wenigsten voraussetzt.[1] Natürlich fehlen für einen grossen Teil der Erdoberfläche noch die entscheidenden Messungen.

Des ferneren handele ich von den Mitteln, die man

---

[1] Vgl. die neueren Publikationen von Helmert in den Berliner Berichten seit 1900, auch Geogr. Zeitschr. Bd 6 (1900)

hat, den Verlauf der Geoidflächen thatsächlich festzulegen. Ich führe da speciell an:

a) Die astronomischen Ortsbestimmungen. Sie geben uns für jeden einzelnen Punkt die Richtung der Normalen und damit die Tangentialebene der durch ihn gehenden Niveau-, resp. Geoidfläche.

b) Die Schweremessungen mit dem Pendel. Die Schwere hängt natürlich von den Kraftcomponenten X, Y, Z ab. Wollen wir die gesamte Kraft in der Richtung der Normalen, so haben wir $P = \frac{\partial V}{\partial n}$ zu bilden, wo n die Normale in dem betrachteten Punkte ist. Bei den Schweremessungen misst man nun das P, so dass uns eine solche Messung darüber orientiert, wie dicht die Niveauflächen V = const. an der betrachteten Stelle auf einander folgen. Wo der Betrag der Schwere geringer ist, da sind die Geoidflächen sozusagen aufgelockert, da wo der Betrag der Schwere größer ist, sind sie auseinander gedrängt (P nimmt umgekehrt proportional mit dn zu und ab).

c) Das dritte sind die direkten geodätischen Messungen in horizontaler und verticaler Richtung von Punkt zu Punkt. Diese fixieren (theoretisch zu reden) die verschiedenen Punkte der Oberfläche, an denen beobachtet ist, vollständig in ihrer relativen Lage

zu einander.

Man kennt also (vollständige Beobachtungen vorausgesetzt) außer der relativen Lage der einzelnen Punkte die Tangentialebenen der durch sie gehenden Niveauflächen und den Differentialquotienten des Potentials senkrecht dazu. Das mathematische Problem ist, wenn alle Messungen mit der erreichbaren Genauigkeit gemacht sind, daraus den Verlauf der Geoidfläche nach Möglichkeit exakt zu bestimmen.

In dem Vordersatze sage ich schon: wenn alle Messungen so genau wie möglich gemacht sind; sie sind es natürlich nicht, mit Ausnahme einzelner bevorzugter Länder. Also: Das empirische Material hierfür ist nur erst für einen kleinen Teil der Erdoberfläche genügend zusammengetragen und fehlt für die von dem Ocean überdeckten Teile noch vollständig.

Indem ich hier gar nicht weiter auf die einzelnen Beobachtungen eingehe, die zu behandeln in die Geophysik gehört, will ich als einzelnes Resultat von aktuellem Interesse hervorheben, daß Nansen, der auf seiner Expedition auf dem Polareise Schweremessungen ausgeführt hat, dort in Übereinstimmung mit der Vermutung normale Schwere gefunden hat.

Jetzt aber wende ich mich der abstrakt mathe

matischen Kritik im Sinne dieser Vorlesung zu und frage:

Wieweit sind die Geoidflächen überhaupt exakt mathematisch definiert?

Sie wird folgender Satz nicht überraschen, den ich aber ausdrücklich anführe, weil man die Geoidflächen in ausgedehnten Kreisen für etwas Exaktes, womöglich gar für analytische Flächen hält.

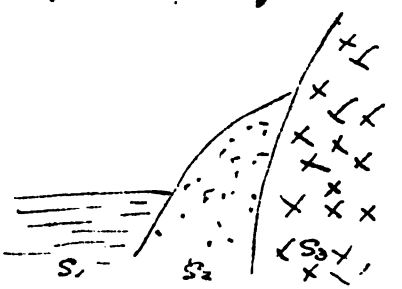
Selbstverständlich ist auch die praktische Definition der Geoidfläche keine theoretisch vollkommene, sondern, wie immer bei praktischen Dingen, eine nur approximative.

Dabei will ich mich nicht in Spitzfindigkeiten verlieren, sondern nur folgendes anführen:

In dem Potential V kommt zunächst ein Integral über alle Massenteilchen der Erde vor. Wie können da fragen, ob das Luftmeer mit eingeschlossen werden soll u.s.w. Alles dies läßt sich nur conventionell festlegen; z.B. mögen wir zur Erdmasse die festen, flüssigen und gasförmigen Massen bis zu 10 km von der Erdoberfläche fort rechnen. Damit haben wir dann die allerdings sehr dünnen, aber auch sehr ausgedehnten Luftmassen, die weiter hinausliegen und in das Medium des Weltenraumes

sich verlieren, weggelassen. Dieselben müssen aber auf das Integral doch einen Einfluss ausüben. Dazu kommt, dass die Massen stets in Bewegung sind (Circulation des Wassers, Änderungen des Luftdrucks, u. s. w.), das Potential V also eine Funktion der Zeit wird. Natürlich ist diese zeitliche Änderung unbedeutend, sodass wir praktisch davon absehen können, bei der theoretischen Erwägung aber müssen wir es beachten.

Ich will von meinem Standpunkte aus hier insbesondere eine Arbeit von Bruns 1878: „Über die Figur der Erde" besprechen, die sich durch mathematische Strenge der Darstellung auszeichnet. Ich wünsche zu fragen: Wie stimmt seine Darstellungsweise zu dem, was wir in der gegenwärtigen Vorlesung stets wieder betonen?



Bruns denkt sich die Erde aus verschiedenen Schichten bestimmter Gesteine, Meeren u. s. w. gebildet, wie dies schematisch die Figur andeuten möge. Dabei nimmt er eine continuierliche Raumerfüllung durch diese Massen an und setzt die Dichte innerhalb der einzelnen Schichten constant $= \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ an. Über diese Auffassung haben wir schon früher ge-

sprochen (als wir gelegentlich von der Constitution der Materie handelten) und hervorgehoben, dass man besser von Mittelwerten sprechen sollte. Des Weiteren setzt Bruns voraus, dass die Begrenzungsflächen der einzelnen Aggregate sämtlich analytisch seien, (was wieder der von mir dargelegten Auffassung, derzufolge „analytische Flächen" in der Natur überhaupt nicht vorkommen, widerstreitet, und also nur sehr cum grano salis zu verstehen ist). Ich recapitulire vielleicht so:

Die Annahme, dass die Masse der Erde aus homogenen Stücken verschiedener Continua besteht, die mit analytischen Flächen aneinander grenzen, ist sicher keine genaue Schilderung der Wirklichkeit, sondern nur approximativ zu verstehen.

Auf die genannten Voraussetzungen wendet Bruns nun die Formeln und Sätze der idealen Potentialtheorie an und fragt sich, wie nach den Lehren dieser präcisen Potentialtheorie die Niveauflächen verlaufen. Er kommt so zu dem Schlusse, dass jede Geoidfläche, soweit sie in demselben Ausgangsmaterial verläuft, ein analytisches Flächenstück vorstellt und dass da, wo an der Grenze der Materialien 2 solche analytische Flächen aneinander stoßen, kein Knick ein-

heit, wohl aber eine Discontinuität im Krümmungsradius. (Das Letztere kommt dadurch heraus, daß die ideelle Potentialtheorie für den Übergang aus einem Medium in ein zweites Continuität der ersten, dagegen Discontinuität der zweiten Differentialquotienten ergiebt).

Wir fragen, was diese Ergebnisse von Bruns (oder überhaupt alle ähnlichen theoretischen Entwickelungen) für die praktischen Messungen zu bedeuten haben, da doch die Voraussetzungen im strengen Sinne des Wortes nicht gelten resp. nur als approximative Schilderungen der wirklichen Verhältnisse gelten können. Indem ich daran erinnere, welche Bedeutung der geodätischen Linie wir für die Messungen auf der Erdoberfläche erhielten, gebe ich folgenden Satz:

Wir werden nach einer Interpretation der Bruns'schen Resultate suchen, die derjenigen ähnlich ist, die wir oben für die praktische Bedeutung der auf dem Ellipsoid zu ziehenden geodätischen Linien gefunden haben.

Ein genaueres Eingehen würde uns aber tief in die Potentialtheorie hineinführen und muß wohl einer besonderen Vorlesung vorbehalten bleiben.

Wir schließen damit unsere Betrachtungen über

Geodäsie. Rückblickend dürfen wir sagen:

Die Geodäsie ist im Allgemeinen ein glänzendes Beispiel dafür, was man mit der Mathematik in den Anwendungen machen kann und wie man es machen soll. Man bekommt selbstverständlich alles nur approximativ bestimmt, zugleich aber hat man überall da, wo die Untersuchung zuende geführt ist, das Maß der Annäherung bestimmt.

II 4. Fortsetzung der praktischen Geometrie: B) Zeichnende Geometrie.

Wenn ich mich jetzt zu dem zweiten Zweige der praktischen Geometrie, der zeichnenden Geometrie, wende, so liegen hier die Dinge viel ungünstiger.

Die zeichnende Geometrie kann entweder als Zielpunkt eine zeichnerische Darstellung der räumlichen Verhältnisse haben (darstellende Geometrie) oder die Ersetzung des numerischen Rechnens durch die Konstruktion auf dem Zeichenblatte (graphischer Calcul). In beiden Fällen sind unsere alten, gewohnten Überlegungen am Platze: wie steht es mit der Genauigkeit, wie weit sind hier darauf bezügliche Theoreme vorhanden, was bleibt als Desideratum bestehen?

Vor allem muß ich hier den Satz voranstellen:

In der zeichnenden Geometrie ist eine rationelle Fehlertheorie, wie sie in der Geodäsie vorliegt, bisher

nicht entwickelt.

Dabei nenne ich eine Fehlertheorie rationell, welche auf Verwendung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen basiert ist, sodaß wir, um die Genauigkeit einer Construktionsmethode zu beurteilen, sie wiederholt auf dieselbe Aufgabe anwenden und dann die erhaltenen Resultate mit der Methode der kleinsten Quadrate oder sonstwie abgleichen.

Als eine Vorarbeit zu einer solchen rationellen Fehlertheorie construktiver Lösungen mag man die Betrachtungen, die der französische Mathematiker Lemoine vor ungefähr 10 Jahren begonnen und als Géométrographie bezeichnet hat, ansehen. Er zählt bei den verschiedenen Lösungen einer Construktionsaufgabe z.B. des Apollonischen Problems (die 8 Berührungskreise an 3 feste Kreise mit Zirkel und Lineal zu konstruieren) ab, wie oft das Lineal und der Zirkel dabei benutzt werden. Die dabei herauskommende Ziffer bezeichnet dann Lemoine als Maß der Einfachheit resp. Complikation der Construktion. Sie sehen, wie dies mit unsern Betrachtungen zusammenhängt. Je größer die Zahl d.h. je öfter Zirkel und Lineal benötigt werden, desto ungenauer wird, allgemein zu reden, die Zeichnung,

sodaß man geneigt sein wird, die einfachste Lösung im Sinne Lemoine's zugleich als die genaueste in unserm Sinne anzusehen. Immerhin ist die als mésure de simplicité dienende Zahl nur ein sehr äußerliches Maß und darum der Ansatz nur erst ein vorläufiger. Denn es werden dabei sehr ungleichwertige Dinge als gleichwertig abgezählt. Beispielsweise ist die Verbindungsgerade zweier sehr nahe gelegener Punkte viel weniger genau bestimmt, als diejenige zweier weiter auseinander gelegener Punkte!)

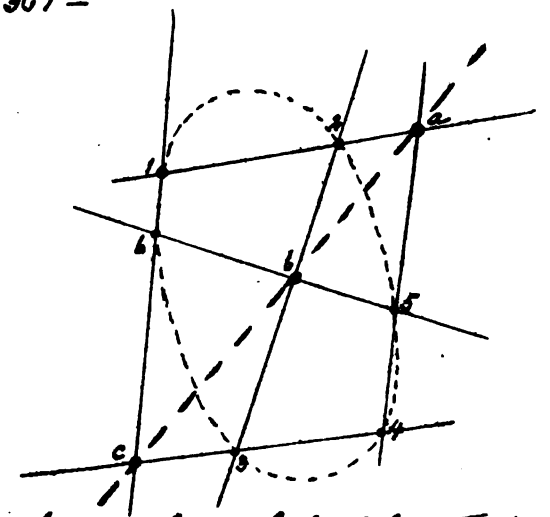
Wie immer man sich aber eine Fehlertheorie der geometrischen Constructionen durchgeführt denkt, eins ist klar, sie wird sich nie direkt an abstrakte Sätze der Präcisionsmathematik anschließen können, sondern parallellaufende Theoreme der Approximationsmathematik benötigen.

Ich erläutere dies an einem charakterischen Beispiele.

Es möge sich um die zeichnerische Wiedergabe des Pascal'schen Sechecks bezw. des zugehörigen Pascal'schen

---

1) Vergl. auch A. Wiking, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene, Dresden, Programm des Gymnasiums zum heiligen Kloster, 1899. Ergiebt u.a. Hülfsconstructionen, deren Zweck es ist, nur ungenau auszuführende Operationen, wie z.B. Verbindung zweier nahgelegener Punkte durch eine Gerade, zu vermeiden.



Satzes handeln.

Da mag ein reiner Mathematiker, der nur daran gewöhnt ist, aus strengen Prämissen zu schliessen, und der vielleicht durch langjährige Beschäftigung mit der Arithmetik das Gefühl dafür verloren hat, dass unter Umständen eine kleine Abänderung in den Prämissen auch nur einen kleinen Einfluss auf das Resultat hat, sich wundern, dass bei der zeichnerischen Construktion des Schecks, wo doch die strengen Prämissen des Pascal'schen Satzes nicht erfüllt sind, die Sache zum Schlusse dennoch leidlich stimmt. Darauf ist zu erwidern, dass allerdings der Pascal'sche Satz als solcher nicht genügt, um dies zu verstehen, sondern dass sich noch eine theoretische Betrachtung approximationsmathematischer Natur anschliessen muss.

Zunächst gebe ich den Pascal'schen Satz selber.

Hat man 6 Punkte 1, 2, 3 ... 6, die auf einem Kegelschnitt liegen und zieht man die Verbindungsgeraden

$$\overline{12} \quad \overline{23} \quad \overline{34}$$
$$\overline{45} \quad \overline{56} \quad \overline{61}$$

und bringt die in dem Schema untereinander stehenden Seiten zum Schnitt, so liegen die Schnittpunkte a, b, c auf einer Geraden.

Diesem Satz gegenüber, der sich auf Grund der gewöhnlich angenommenen Axiome streng beweisen läßt, stelle ich nun folgenden approximativen, erweiterten Pascal'schen Satz auf[1]:

„Habe ich 6 Punkte, die ungefähr auf einem Kegelschnitt liegen und ziehe ich deren ungefähre Verbindungsgeraden und bringe diese in a, b, c ungefähr zum Schnitt, dann liegen diese Punkte ungefähr auf einer geraden Linie."

Ersichtlich ist dieser Satz (und nicht der „ideale" Pascal'sche Satz) die wahre theoretische Grundlage der zeichnerischen Construktion.

Den Beweis unseres Satzes kann man in der Weise führen, daß man durchaus analytisch operiert, was aus den früher auseinander gesetzten Gründen für uns das Bequemste sein wird. Wir formulieren zuerst den Pascal'schen Satz selber analytisch, d.h. wir denken uns folgende Entwicklung analytisch durch

---

[1] Ich nenne diesen Satz kurzweg „approximativ", weil er von Fragen der Approximation handelt. Hat man diese noch erst genauer umgrenzt, so ist der Satz selbst nicht nur richtig, sondern überhaupt exakt (wie jeder vollständige Satz der Approximationsmathematik).

geführt:

Haben die 6 Punkte 1, 2, ... 6 auf dem Kegelschnitt die Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; ..... x_6, y_6 und die 3 aus ihnen abgeleiteten Punkte a, b, c die Coordinaten x_a, y_a; ... x_c, y_c; dann besteht die Relation, die aussagt, daß a, b, c auf einer Geraden liegen:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Nunmehr variieren wir die Coordinaten x_1, y_1; ... x_6, y_6 in $x_1 + \delta x_1$, $y_1 + \delta y_1$; ..... $x_6 + \delta x_6$, $y_6 + \delta y_6$, wo die δ relativ zu den übrigen Dimensionen der Zeichnung kleine Größen sind. Um nun die Sache nicht allzu sehr zu komplicieren, nehme ich an, daß weiter keine Ungenauigkeiten vorliegen, d.h. daß die Verbindungsgeraden scharf gezogen seien und ebenso die Schnittpunkte scharf markiert werden. Dann ist klar, daß die Variationen der Coordinaten der Schnittpunkte a, b, c nur von den $\delta x_1, \delta y_1$; .... abhängen. Wir berechnen uns für diese variierten Coordinaten die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_a + \delta x_a & y_a + \delta y_b & 1 \\ x_b + \delta x_b & y_b + \delta y_b & 1 \\ x_c + \delta x_c & y_c + \delta y_c & 1 \end{vmatrix} = \Delta ,$$

die geometrisch einen doppelten Dreiecksinhalt bedeutet.

Dass Δ ist natürlich nicht mehr gleich Null, dass es bei geeigneter Annahme klein bleibt, ist zu beweisen.

In der Geodäsie und massenden Astronomie ist ein solches Verfahren ausserordentlich üblich. Da nennt man solche Formeln, wie ich sie hier postuliere, Differentialformeln, sodass wir unsere Forderung auch so werden können.

Wir müssen nicht nur die Formeln des Pascal'schen Satzes, sondern auch die zugehörigen Differentialformeln zur Hand haben. Denn erst haben wir das genügende theoretische Substrat für die constructive Durchführung des Pascal'schen Satzes (oder besser gesagt: für das mathematische Verständnis der constructiven Durchführung).

Dabei will ich mich hier noch ein wenig über den Ausdruck: Differentialformeln, verbreiten damit sich bei dem Gebrauch eines solchen Wortes unser Gewissen nicht beunruhigt.

Die Unruhe kommt daher, dass es auf der einen Seite heisst, es handele sich bei der Differentialrechnung ausschliesslich um den strengen Grenzbegriff, während auf der andern Seite beim Gebrauch der Differentialformeln kleine endliche Differenzen in Betracht gezogen werden. Dieser Widerspruch gleicht sich folgendermassen ab:

Nehmen Sie den einfachen Fall einer Funktion, die von einer Veränderlichen abhängt $y = f(x)$. Dann heißt es bei dem Praktiker, man entwickele, um $f(x+\delta x)$ zu erhalten, nach dem Taylor'schen Satze und breche bei dem ersten Gliede ab. Also wenn

$$f(x+\delta x) = f(x) + \varphi(x).\delta x \text{ , so setze man } \varphi(x) = \frac{df}{dx}.$$

Sie müssen die Sache natürlich gewissenhafter fassen und sagen: $\varphi(x).\delta x$ ist gar nicht das erste Glied der Taylor'schen Reihe, sondern das Restglied, welches ich dem nullten Gliede hinzufügen muß, damit die Formel exakt wird, so daß $\varphi(x)$ nicht gleich $\frac{df(x)}{dx}$, sondern gleich $\frac{df(x+\vartheta\delta x)}{dx}$ ist $(0<\vartheta<1)$, d.h. $\varphi(x)$ ist nicht der Differentialquotient von $f(x)$ an der Stelle x, sondern an einer Zwischenstelle $x+\vartheta\delta x$. Es kommt hier also ein Mittelwert von $\frac{df(x)}{dx}$ hin ein. Bekanntlich nennt man die Formel

$$f(x+\delta x) = f(x) + \delta x.\, f'(x+\vartheta\delta x)$$

das Rolle'sche Theorem, so daß wir sagen können:

„Wenn wir uns gestatten, bei irgendwelcher abgekürzten Rechnung statt $f(x+\delta x) = f(x) + \varphi(x)\delta x$ zu schreiben und wollen unser Gewissen beruhigen, so sagen wir: $\varphi(x)$ bestimmt sich nicht aus der Taylor'schen Reihe, sondern als Mittelwert nach dem Rolle'schen Theorem."

Genauso wie in diesem einfachen Fall ist es bei den Differentialformeln in den complicierteren Fällen. Praktisch drückt man sich so aus, als dürfte man beim Taylor'schen Satz gegebenenfalls alle höheren Potenzen der Differenzen fallen lassen. Statt dessen sollten wir exakter Weise die Differentialformel als Restformel im Sinne des Rolle'schen Satzes auffassen. Das eine ist von dem anderen praktisch so lange, aber auch nur so lange nicht wesentlich verschieden, als der Differentialquotient $f'(x)$ sich im Intervall δx nur wenig abändert.

Wenn hiernach das Wesen der Differentialformeln mit dem Gewissen des reinen Mathematikers sehr wohl verträglich ist, bezw. nur kurzer Erläuterung bedarf, so möchte man allerdings wünschen, daß statt Differentialformel der Ausdruck „lineare Differenzenformel" oder auch „Variationsformel" gebraucht würde.

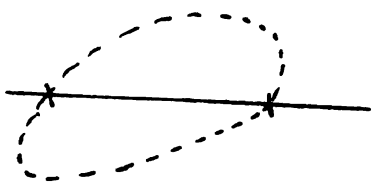
Ich möchte jetzt eine weitere, besonders interessante Frage aufwerfen.

Wir sahen auf pg 256 ff., daß wir jede gezeichnete Curve in der Art durch eine Idealcurve ersetzen können, daß nicht nur die Ordinaten, sondern auch die Richtung und Krümmung der empirischen Curve — soweit diese Dinge überhaupt quantitativ bestimmt

sind – durch die Ordinaten, die Richtung und Krümmung der Idealcurve befriedigend approximiert werden. Kann ich nun aus den gestaltlichen Verhältnissen der empirischen Curve, die ich vor Augen sehe, auf entsprechende Eigenschaften der Idealcurve einen Schluss machen?

Für den Weg, den wir bei Beantwortung dieser Frage einschlagen, ist selbstverständlich die oben von mir vertretene Auffassung entscheidend, dass die Idealcurve jenseits der Anschauung liegt und nur eine definitionsmäßige Existenz hat. Ich darf also nicht ausschließlich an die Anschauung appellieren. Vielmehr wird es sich jeweils darum handeln, zu überlegen, ob sich, bezw. weshalb sich die Dinge, die wir bei der empirischen Construktion sozusagen in grober Weise vor Augen sehen, vermöge der zugrunde gelegten Definitionen mit aller Schärfe auf das Idealgebilde übertragen.

Nehmen wir gleich ein Beispiel.



In der nebenstehenden Figur haben wir eine geschlossene, durchaus convexe Curve und eine dieselbe schneidende Gerade. Wir bemerken, dass zwei und nur zwei Schnittpunkte auftreten. Werden wir dies als Satz auf die entsprechenden Idealgebilde

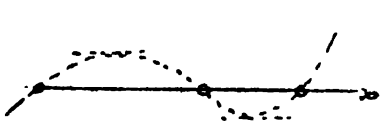
übertragen können?

Wir ersetzen die Gerade der Figur in Gedanken durch eine ideale Gerade, die gezeichnete Curve aber vorerst durch irgend eine approximierende Jordan-Curve (die noch keine Tangenten, geschweige denn Krümmungskreise zu besitzen braucht). Die Anschauung belehrt uns, daß die Idealgerade sowohl durch das Innere als das Äussere der Jordan-Curve hindurch geht. Also sind nach dem Jordan'schen Satze in der Nähe der Stellen, in denen sich die empirische Curve und die empirische Gerade kreuzen, in der That Schnittpunkte der Idealgebilde vorhanden. Diese Aussage ist aber nur Folge der Definition, durch die wir seinerzeit die Jordan-Curve eingeführt haben. Für die Zwecke der Approximation würden wir die empirische Curve statt durch eine Jordan-Curve ebensowohl durch eine überall dichte, aber nicht abgeschlossene Punktmenge ersetzen können (eine Punktmenge, welche ihre Grenzelemente nicht miterhält, wie z. B. die Menge der rationalen Punkte der Abscissenaxe). Dann würden die Schnittpunkte, von denen wir reden, nicht notwendigerweise vorhanden sein.

Mit dem Gesagten ist nur erst die Existenz, keineswegs die Zahl der Schnittpunkte festgelegt. Es kann sehr wohl sein, daß da, wo die empirische Figur ec-

nen Schnittpunkt erkennen läßt, die idealisierte Figur deren 3, oder 5, ... aufweist (eine ungerade Zahl muß es sein, weil an der betreffenden Stelle die idealisierte Gerade aus dem Äusseren der Jordan-Curve in das Innere tritt). Dies ist in der That nicht ausgeschlossen, wenn wir die Art der Jordan-Curve nicht erst noch weiter definitionsmäßig einschränken, man denke an die gestaltlichen Verhältnisse der Weierstraß-Curve oder der Peano-Curve. Als solche Einschränkung wählen wir jetzt, daß die Idealcurve in jedem Punkte eine bestimmte Richtung und Krümmung gemäss dem Vorbilde der empirischen Curve besitzen soll. Ins besondere soll dieselbe ebenso wie die empirische Curve überall convex sein und also nirgendwo einen Wendepunkt besitzen.

Daraufhin läßt sich in der That beweisen, daß da, wo die empirische Figur einen Schnittpunkt aufweist, auch die Idealfigur nur einen Schnittpunkt besitzt. Wären nämlich 3 oder mehr Schnittpunkte vorhanden, so wähle man die schneidende ideale Gerade als Abscissenaxe. Das Curvenstück zwischen diesen Schnittpunkten wird sich durch eine Gleichung $y = f(x)$ darstellen, wo $f(x)$ eine



mindestens zweimal differentiierbare Funktion ist. Aus der Thatsache, dass $f(x)$ in dem in Betracht kommenden Teile der Abscissenaxe 3 oder noch mehr Nullpunkte hat, folgert man dann nach dem Rolle'schen Satze, dass $f'(x)$ in dem betreffenden Intervalle mindestens einen Nullpunkt besitzt. Dann hätte also unsere Idealcurve einen Wendepunkt, und dieses widerspricht der Voraussetzung, die wir bei ihrer Einführung machten.

In solcher Weise also denke ich mir den Beweis geführt. Die empirische Figur dient zur Orientierung im Groben; sie hat auch für die feineren Betrachtungen einen grossen heuristischen Wert; schliesslich muss aber der Beweis auf die Begriffsbildungen und Axiome der Präzisionsgeometrie zurückgehen.

In der Litteratur geschieht das letztere mehr oder minder ausführlich, jenachdem der Autor sein Interesse mehr der genauen Begründung bestimmter Sätze oder der Auffindung neuer Resultate zuwendet. Beides hat seine Berechtigung. Ich nenne als Beispiel für genaue Durcharbeitung der Einzelheiten:

A. Kneser: Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven, Math. Ann. 41 (1893),

andererseits für die Aufstellung zahlreicher neuer Sätze:

Juel: Über graphische Curven, Kopenhagener Abhandlungen 10 (1899).

Ich selbst möchte hier auf eine Untersuchung zurückkommen, die ich vor Jahren über die reellen Wendepunkte der algebraischen ebenen Curven angestellt habe (1876, Math. Ann. Bd. 10) und bei der ich ausgiebig von anschauungsmäßigen Figuren Gebrauch machte. Die zu betrachtende reguläre Idealcurve ist dabei also der weiteren Bedingung unterworfen, algebraisch zu sein, wobei größere Complikationen in der weiterhin noch zu schildernden Weise durch die Forderung ausgeschlossen werden, daß es sich jeweils um die allgemeinsten Curven n^{ter} Ordnung handeln soll, welche die in Betracht kommende Eigenschaft besitzen.

Zunächst ein kleiner Excurs über die ebenen algebraischen Curven n^{ter} Ordnung.

Die algebraische Curve n^{ter} Ordnung (C_n) ist durch eine Gleichung n^{ten} Grades gegeben:

$$A_x x^n + B x^{n-1} y + \ldots = 0$$

Zählt man die auftretenden Glieder ab und denkt sich die Gleichung durch einen der Coefficienten dividiert, so erhält man $\frac{n(n+3)}{2}$ als Constantenzahl.

Da entsteht nun die interessante Frage nach der Gestalt dieser C_n. Aus wieviel Ovalen, bezw. anderen Curvenzügen besteht gegebenenfalls eine C_n? Und wie ist es mit ihren Singularitäten, insbesondere ih

pen Wendepunkten?

Diese ganze Fragestellung bezeichnet ein großes Capitel der algebraischen Curventheorie; insbesondere hat man für die niederen Curven sehr interessante, dahin gehörige Sätze aufgestellt. Ich kann hiervon an dieser Stelle natürlich keine zusammenfassende Rechenschaft geben, sondern beschränke mich nur auf die Frage nach der Anzahl der reellen Wendepunkte.

Wir schreiben unsere Gleichung kurz $f(x,y)=0$, oder da es für die allgemeine Betrachtung erwünscht ist, die Auffassungsweisen der projektiven Geometrie einzuführen, in homogener Form:

$$f(x_1,x_2,x_3)=0, \quad \text{wo } x=\frac{x_1}{x_3},\ y=\frac{x_2}{x_3} \text{ gesetzt ist.}$$

Die homogenen Coordinaten wurden in ihrer Bedeutung im letzten Winter ausführlich besprochen, ihr besonderer Zweck ist, die Dinge im Unendlich-Weiten entsprechend den Vorstellungsweisen der projektiven Geometrie formal ebenso zu beherrschen, als ob sie im Endlichen lägen.

Fragt man beim Gebrauch von homogenen Coordinaten nach den Wendepunkten, so kommt man auf das Verschwinden der Hesse'schen Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

der 2te Derivierten unserer Funktion $f(x_1 x_2 x_3)$. Ist f vom n^t Grade, so ist Δ, da jedes f_{ik} vom Grade $(n-2)$ ist, vom Grade $3(n-2)$.

Bringen wir jetzt $f_n = 0$ mit $\Delta = 0$ zum Schnitt, so erhalten wir nach dem Bézout'schen Theorem $3n(n-2)$ Schnittpunkte, unsere C_n hat also $3(n-2)n$ Wendepunkte ($\nu = 3n(n-2)$). Dies ist die erste „Plücker'sche Formel" zur Bestimmung der Singularitäten algebraischer Curven. Etwas genauer können wir sagen:

Eine C_n hat, im allgemeinen, $3n(n-2)$ Wendepunkte, weil die Curven $f_n = 0$ und $\Delta = 0$ sich in $3n(n-2)$ Punkten schneiden. (Dabei ist vorbehalten zu untersuchen, was eintritt, wenn einige der Schnittpunkte zusammenfallen, insbesondere, wieviele dieser Schnittpunkte von den etwaigen singulären Punkten von $f_n = 0$ absorbiert werden).

Wir haben demnach in den niedrigsten Fällen:

für $n = 2$ $\quad \nu = 0$,

— $n = 3$ $\quad \nu = 9$,

— $n = 4$ $\quad \nu = 24$.

Wenn wir jetzt aber eine C_3 oder C_4 zeichnen, so gelingt es höchstens nur 3 resp. 8 reelle Wendepunkte zu finden, sodass G. Salmon, Higher plane curves bereits die Vermutung ausgesprochen hat, dass nur

1/3 der Wendepunkte, also $n(n-2)$ im Maximum reell sein kann. Dies ist die Frage, auf deren Klarlegung wir zustreben:

Man soll womöglich zeigen, daß die Zahl der reellen Wendepunkte einer C_n nicht größer als $n(n-2)$ sein kann, sodaß im günstigsten Falle von den vorhandenen Wendepunkten nur 1/3 ins Reelle fällt.

Der gegebenen Formel für die Anzahl der Wendepunkte füge ich hier noch ohne Beweis die Rücker'sche Formel für die Anzahl der Doppeltangenten einer C_n hinzu

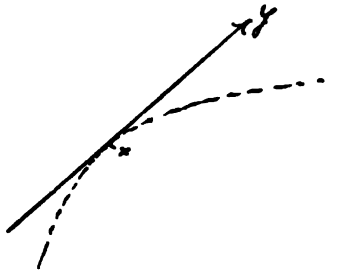
$$t = n/2\,(n-2)(n^2-9),$$

(wobei wieder vorausgesetzt ist, daß die Curve keine sogenannten singulären Punkte hat, worauf wir sogleich noch zurückkommen).

Vorab beschäftigen wir uns mit der Classe einer C_n d. h. der Anzahl der von einem Punkte außerhalb der Curve an diese möglichen Tangenten. Es sind dies ja alles ganz elementare Dinge aus der Theorie der algebraischen Curven, die ich aber hier entwickeln muß, um die betreffenden Formeln für den Beweis unseres Satzes über die Anzahl der reellen Wendepunkte zur Hand zu haben. Ich wähle die Darstellung also etwas ausführlicher.

Man stelle sich die Gleichung der Tangente in ei-

nem Punkte x der Curve auf, indem man mit y die laufenden Coordinaten derselben bezeichne. Die Gleichung lautet (beim Gebrauch homogener Coordinaten):



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) y_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) y_3 = 0,$$ wobei die Klammern andeuten, daß wir bei Bildung der Differentialquotienten den festgewählten Punkt x im Sinne haben. Abkürzend wird also die Gleichung der Tangente im Punkte x in laufenden Coordinaten y:

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0 .$$

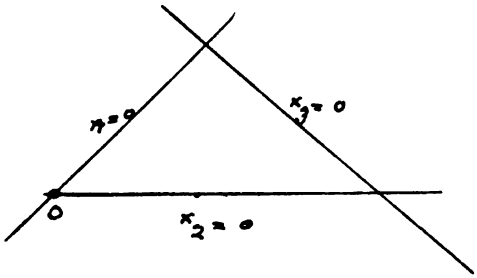
Halten wir aber den Punkt y fest und betrachten x als den laufenden Punkt, so definiert uns die angeschriebene Gleichung offenbar eine Curve $(n-1)^{\text{te}}$ Ordnung, da die f_1, f_2, f_3 vom Grade $(n-1)$ in x sind. Sie heißt die erste Polare des Punktes y in Bezug auf die Curve C_n. Es sind also die Punkte x, die ihre Tangenten durch den Punkt y senden, auf eine C_{n-1} beschränkt, d. h. wir finden diese Punkte als Schnittpunkte der Grundcurve mit der zu y gehörigen ersten Polaren. Haben wir entschieden, wieviel solcher Schnittpunkte existieren, so wissen wir, wieviel Tangenten von y an die C_n gehen. Nach dem Bézout'schen Theorem folgt aber diese Anzahl k unmittelbar als $n(n-1)$.

Dies ist natürlich eine bloße algebraische Bestimmung der Tangenten d.h. wir machen keinen Unterschied zwischen dem Reellen und Imaginären. Wir müssen aber noch in Betracht ziehen, daß singuläre Punkte der Curve auftreten können, wodurch sich diese Anzahl reduzieren kann, da mehrere der Punkte x in einen solchen singulären Punkt hineinfallen können und wir nicht gewillt sind, die Verbindungsgerade $\overline{yx}$ in einem solchen Falle als mehrfache Tangente mitzuzählen.

Die Frage ist also: Wie reduzieren sich die Formeln, wenn singuläre Punkte eintreten? Zunächst was sind überhaupt singuläre Punkte? Auch hier gebe ich nur das Allerelementarste, soviel wir eben benötigen. Wir definieren geradezu:

Ein singulärer Punkt liegt vor, wenn für einen Punkt x die 3 ersten Ableitungen f_1, f_2, f_3 gleichzeitig verschwinden, also die Gleichung der Tangente für jeden Punkt y befriedigt ist. Ein höherer singulärer Punkt liegt vor, wenn auch höhere Ableitungen entweder Null sind oder bestimmte algebraische Bedingungen erfüllen z.B. $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0$.

Welche Bewandnis es mit den singulären Punkten hat, erkennt man am einfachsten, wenn man



das Coordinatendreieck mit einer Ecke in den singulären Punkt legt. Die Gleichung der Curve wird dann folgendermaßen vereinfacht:

Zunächst läßt sich jede Gleichung n^{te} Grades nach Potenzen von x_3 so anordnen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3^n \cdot \varphi_0 + x_3^{n-1} \varphi_1 + \ldots + x_3^0 \cdot \varphi_n = 0,$$

wo die $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ homogene Funktionen $0^{\text{ter}}, 1^{\text{ten}}$ $\ldots$ n^{ten} Grades in x_1, x_2 sind. Soll nun der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ auf der Curve liegen, so muß die Constante φ_0 verschwinden (das Glied 0ter Dimension). Ist der Punkt zudem im Sinne der gerade gegebenen Definition singulär, so ergiebt sich, daß auch die linearen Glieder fortfallen, sodaß die Reihenentwickelung mit den quadratischen Gliedern beginnt:

$$0 = x_3^{n-2} \varphi_2 + \ldots + x_3^0 \varphi_n.$$

Schreiben wir φ_2 auf, so wird es etwa:

$$\varphi_2 = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Ein spezieller Fall ist hier, daß φ_2 identisch verschwindet, ein anderer, daß sich aus $\varphi_2 = 0$ für $\frac{x_1}{x_2}$ eine Doppelwurzel ergiebt. Wenn wir aber die Coefficienten der Curve nicht weitergehend specialisieren, als in der Voraussetzung liegt, daß überhaupt ein sin-

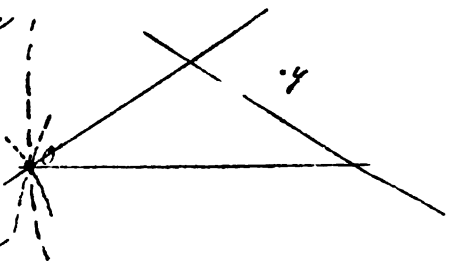
gulärer Punkt vorhanden ist, dann liefert die Gleichung $\varphi_2 = 0$ für das Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$ 2 verschiedene Werte. Die Folge ist, daß unsere Curve n^{te} Ordnung dann in O einen „Doppelpunkt" hat, durch den 2 „getrennte Äste" laufen.

Auf diesen niedrigsten Fall eines singulären Punktes (des „gewöhnlichen" Doppelpunktes) wollen wir uns bei der ganzen von uns zu führenden Betrachtung beschränken.

Wie ein solcher Doppelpunkt auf die Klasse k der Curve einwirkt, ist sehr leicht zu sehen:

Die Gleichung der ersten Polaren des Punktes y ist:

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0.$$



Hier setze man nun für f den Wert $x_3^{n-2}\varphi_2 + \ldots + x_3^0 \varphi_n = 0$. Man sieht sofort, daß die erste Polare durch den Doppelpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ einfach hindurch geht, mit einem Aste, dessen Richtung von den durch $\varphi_2 = 0$ gegebenen beiden Doppelpunktstangenten verschieden ist. Der Doppelpunkt absorbiert also 2 der Schnittpunkte der Grundcurve mit der ersten Polare, so daß wir den Satz haben:

Wenn die Grundcurve d einfache Doppelpunkte

bekommt, dann reduziert sich die Klasse k der Curve um 2d, weil in jedem der Doppelpunkte hinein 2 Schnittpunkte von Grundcurve und Polare fallen, und wir die Verbindungslinie von y mit einem Doppelpunkt x nicht als Tangente von $f=0$ mitzählen werden.

Das ist alles, was ich über die früheren Angaben hinaus weiterhin von den Plücker'schen Formeln brauche. Ich lasse also die weiteren Fragen bei Seite, welche Plücker behandelt hat: Wieviel Wendepunkte, wieviel Doppeltangenten absorbiert der Doppelpunkt?

Lassen Sie mich vielmehr folgende Bemerkung anknüpfen:

Denken Sie sich f mit willkürlichen Coefficienten wirklich hingeschrieben, ebenso die 3 Gleichungen $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ (aus denen zusammen $f=0$ folgt). Werden diese letzteren im allgemeinen miteinander verträglich sein oder welche Bedingungen für die Coefficienten von f müssen erfüllt sein, damit es der Fall ist, damit also ein singulärer Punkt auftritt?

Im Falle einer C_2 können wir das noch leicht anschreiben. Sei:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = f.$$

Hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ \tfrac{1}{2} f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ \tfrac{1}{2} f_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Dies sind 3 homogene Gleichungen in x_1, x_2, x_3, die nur verträglich sind, falls die Bedingung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Wir haben hier den bekannten Satz:

Soll ein Kegelschnitt einen singulären Punkt haben, so muß die Coefficientendeterminante verschwinden.

Genau entsprechend ist die Sache bei den Curven höherer Ordnung. Da geben die f_1, f_2, f_3 3 Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, die miteinander verträglich sein sollen. Es muß zu dem Zweck die Eliminationsresultante, oder wie man auch sagt, die Discriminante D der Grundcurve verschwinden. In dem besonderen Fall der C_2 wird die Discriminante gleich der Determinante. Indem ich auf das oben gebrauchte Wort „im allgemeinen" hier verweise, sage ich:

Soll eine C_n einen singulären Punkt haben, so muß die Discriminante ihrer Coefficienten verschwinden und es hat daher die Curve im allge

meinen (d. h. insofern die Coefficienten willkürlich gedacht sind) keinen singulären Punkt.

Einen ähnlichen Satz können wir für höhere Singularitäten aussprechen; ich knüpfe daran gleich eine weitere Folgerung, indem ich sage:

Damit noch höhere Singularitäten der C_m vorliegen, müssen die Coefficienten von f außer $D=0$ noch weitere algebraische Bedingungsgleichungen erfüllen und es hat also im allgemeinen eine Curve, wenn $D=0$ ist, nur einen einfachen Doppelpunkt, der die Klasse der Curve um 2 Einheiten reduziert; erst weitere Bedingungsgleichungen sichern die Existenz höherer Singularitäten.

Das ist die allgemeine algebraische Grundlage, bei der wir noch nicht das Reelle von dem Imaginären schieden, ja auch die Coefficienten in f complex annehmen dürfen.

Jetzt aber gehe ich dazu über, zu untersuchen, welche Realitätstheoreme sich auf Grund der allgemeinen algebraischen Theorie einstellen.

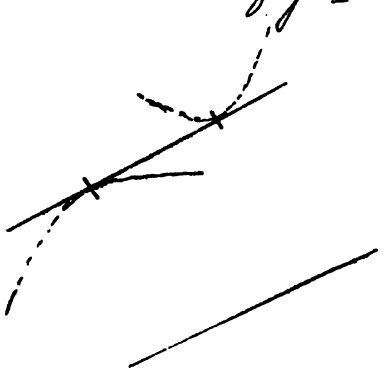
Wir haben hier zunächst eine Reihe von Verabredungen einzuführen.

Wir machen die Annahme, daß die Coefficienten in f reell sind, oder vielmehr reelle Veränderliche,

sodaß wir gleich an die Gesamtheit aller C_n denken und fragen, was sich über die Gestalt der C_n überhaupt aussagen läßt.

Weiter unterscheiden wir die Anzahl der Wendepunkte w in 2 Classen, reelle und imaginäre; da letztere stets paarweise auftreten müssen, setzen wir $w = w' + 2\bar{w}$.

Ebenso teilen wir die Doppeltangenten in 2 Classen, reelle und imaginäre. Dabei trennen wir aber die reellen noch wieder in 2 Kategorien, indem wir dabei an folgende Unterscheidung denken:



Es können bei einer reellen Doppeltangente die beiden Berührungspunkte reell sein, sodaß wir nebenstehendes Bild haben; sie können aber auch imaginär sein, sodaß wir für das Auge eine <u>isolierte Doppeltangente</u> erhalten. Also:

<u>Die reellen Doppeltangenten zerfallen in solche mit reellen Berührungspunkten, deren Anzahl t' sei, und in solche mit imaginären Berührungspunkten (isolierte Doppeltangenten), deren Anzahl t'' sei. Wir haben daraufhin für die Gesamtzahl t:</u>

$$t = t' + t'' + 2\bar{t},$$

wo $2\bar{t}$ die Zahl der imaginären Doppeltangenten ist.

Etwas Ähnliches liegt bei den Doppelpunkten vor. Hier werden wir schreiben:

$$d = d' + d'' + 2\bar{d},$$

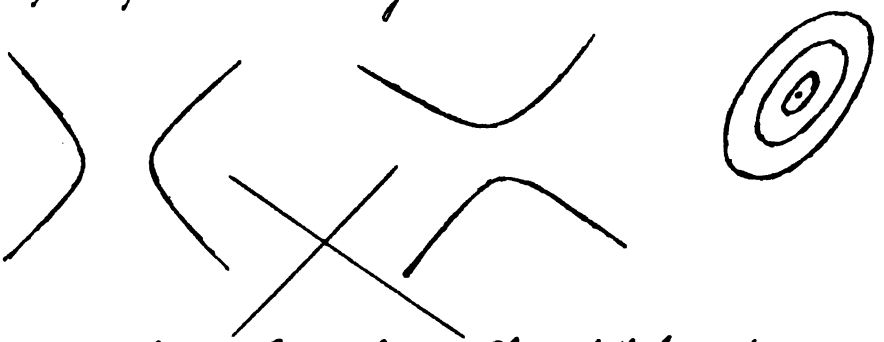
wo $2\bar{d}$ die imaginären Doppelpunkte bezeichnet, die bei den Realitätsuntersuchungen fortfallen, und d' die reellen Doppelpunkte mit reellen Ästen, d'' die reellen isolierten Doppelpunkte.

Dies sind alles nur erst allgemeine Verabredungen, wie wir gewisse Buchstaben gebrauchen werden. Wir fragen jetzt zunächst nach der Gesamtheit der Gestalten der C_n, mögen nun Doppelpunkte vorhanden sein oder nicht.

Ich erinnere zunächst an die Gestalten im Falle $n=2$.

Wenn kein Doppelpunkt vorhanden ist, so haben wir entweder eine reelle oder imaginäre Curve. Indem wir uns so ausdrücken, sehen wir die 3 Typen der reellen Curven: Ellipse, Parabel und Hyperbel als nicht wesentlich verschieden an, sofern jeder aus den andern durch eine projektive Umformung hervorgeht. Lassen wir aber Doppelpunkte zu, so wird die C_2 entweder in ein reelles oder imaginäres Linienpaar ausarten, im letzteren Falle haben wir für das Auge einen isolierten Punkt. Dabei kann man die Formen in einfacher Weise durch Grenzübergang aus der Hyperbel

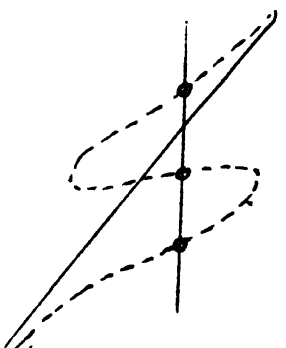
resp. Ellipse herausbringen.



Die Ellipse, Parabel oder Hyperbel bezeichnen wir als Curvenzüge von paarem Charakter, weil eine Gerade sie entweder in 2 Punkten oder überhaupt nicht schneidet.

Nun zu den C_3.

Hier haben wir statt 3 oder 1 Schnittpunkt mit einer Geraden. Daher tritt notwendig ein sogenannter unpaarer Zug auf, wie ein solcher nebenstehend (mitsamt seiner Asymptote) gezeichnet ist. Daneben kann dann gern noch ein paarer Zug vorhanden sein.



Diese Unterscheidung dehnt sich auf die C_n aus, für die wir folgendes, etwas unbestimmtes Bild erhalten:

Eine Curve C_n ohne singuläre Punkte besteht aus einer endlichen Anzahl von geschlossenen Zügen. Ist n gerade, so haben wir lauter paare Züge, ist n unge-

pade, so liegt neben etwaigen paaren Zügen ein unpaarer Zug vor. (Zwei oder mehr unpaare Züge können nicht auftreten, weil dieselben sich gegenseitig schneiden würden, sodass die Curve entgegen der Voraussetzung nicht singularitätenfrei wäre).

Wie das im Einzelnen ist, muss einer besonderen Darstellung, bezw. weitergehenden Untersuchungen überlassen bleiben. Das Schöne aber ist, dass das Theorem über die Wendepunkte, das ich hier vortragen werde in dieser Hinsicht keinerlei Kenntnisse, voraussetzt. Ich behaupte nämlich:

Unabhängig von den mannigfachen Formen, die eine singularitätenfreie C_n besitzen kann und die bei wachsendem n in der That sehr vielgestaltig sind, gilt bezüglich der Wendepunkte und Doppeltangenten die Relation:

$$w' + 2t' = n(n-2).$$

Mit dem Beweise dieses Theorems wollen wir uns nunmehr eingehend beschäftigen.

Es ist klar, dass, wenn dies Theorem gilt, $w' \equiv n(n-2)$ ist und damit das durch Induktion von Salmon gefundene Resultat über die reellen Wendepunkte richtig ist:

Von der Gesamtzahl der Wendepunkte, die eine C_n

nach Plücker besitzt, kann höchstens der 3te Teil reell sein.

Zum Beweise unseres Theorems entwickeln wir uns vorweg eine gewisse Hülfsanschauung.

Die allgemeine C_n hat, wie wir sahen, $\frac{n(n+3)}{2}$ Constante. Diese interpretieren wir als Coordinaten eines Raumpunktes in einem höheren Raume und nennen den Raumpunkt den zu der C_n gehörigen „repräsentierenden Punkt". Durchläuft C_n alle seine möglichen Gestalten d.h. variieren die Coefficienten in $f=0$ beliebig, so durchläuft der repräsentierende Punkt den ganzen Raum von $\frac{n}{2}(n+3)$ Dimensionen. Sie werden sehen, wie nützlich es ist, sich einen solchen Raum zu fingieren und ihn der Gesamtheit aller C_n an die Seite zu stellen, indem es uns nämlich dadurch leichter wird, gewisse Mannigfaltigkeitsüberlegungen anzustellen. Wir sind eben ausschließlich gewöhnt, Continuitätsbetrachtungen in Punkträumen vorzunehmen.

Jetzt achten wir in der Gesamtheit der C_n auf diejenigen Curven, bei denen die Discriminante D verschwindet, bei denen also mindestens ein singulärer Punkt auftritt (vielleicht auch mehrere). Weil $D=0$ eine algebraische Gleichung ist (sie wurde durch

ein Eliminationsproblem bei algebraischen Gleichungen gewonnen), so schneiden wir mögen $D=0$ aus dem repräsentierenden Raum von $\frac{n}{2}(n+3)$ Dimensionen eine algebraische Mannigfaltigkeit von $\frac{n}{2}(n+3)-1$ Dimensionen aus, die ich eine Fläche nenne, (indem ich die uns geläufige Sprechweise von dem R_3 auf den $R_{\frac{n}{2}(n+3)}$ übertrage).

Wie ist nun eine solche Fläche in einem höheren Raume gestaltet? An sich können, wenn schon bei den Curven in der Ebene so vielerlei Gestalten vorliegen (z. B. Cassini-Curve), sehr große Komplikationen eintreten. Aber hier ist die Sache einfach, weil wir es mit algebraischen Gebilden zu thun haben. Ich gebe gleich folgenden Satz:

Eine solche algebraische Fläche durchzieht den Raum mit einer endlichen Anzahl von Wandungen und zerlegt ihn in eine endliche Anzahl von Kammern, die in Wandungen aneinanderstoßen, welche eine Dimension weniger haben als der gegebene Raum selbst. Dies gilt dann insbesondere in unserm repräsentierenden Raume $R_{\frac{n}{2}(n+3)}$ für die Fläche $D=0$.

Was sind das nun für Curven n^{ter} Ordnung der Ebene, bei denen die Discriminante $D=0$ wird?

Das sind zunächst Curven mit einem gewöhnlichen

Doppelpunkt, der die Klasse um 2 Einheiten reduziert. Es sind weiter die Curven mit höheren Singularitäten (wozu ich auch das gleichzeitige Auftreten mehrerer Doppelpunkte rechne). Wenn aber diese höheren Singularitäten eintreten sollen, so müssen außer $D = 0$ noch andere algebraische Bedingungsgleichungen erfüllt sein, die nur in endlicher Anzahl zur Verfügung stehen. Das letztere kommt dadurch heraus, daß es sich stets, solange p selbst endlich ist, um eine endliche Anzahl von Unterscheidungen: ob einige Wurzeln zusammenfallen oder unbestimmt werden u.s.w. handeln wird.

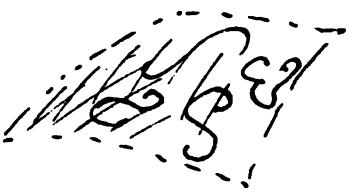
Es ist für unsere folgende Betrachtung besonders wichtig, daß hier nur eine endliche Anzahl solcher Bedingungsgleichungen möglich ist.

Welche Einschränkung erleidet nun diesen Bedingungsgleichungen für die höheren Singularitäten entsprechend der repräsentierende Punkt?

Ich gebe gleich folgenden Satz:

Die repräsentierenden Punkte derjenigen algebraischen Curven, welche höhere Singularitäten haben, füllen auf der Fläche $D = 0$ höchstens „algebraische Curven" in endlicher Zahl aus, d.h. algebraische Mannigfaltigkeiten, deren Dimension mindestens um 2 geringer ist, als $\frac{n}{2}(n+3)$.

Dies läßt sich durch folgende räumliche Ausdrucksweise noch lebendiger machen.



Diese algebraischen Curven mit höheren Singularitäten ergeben auf den Wandungen $D=0$, welche die verschiedenen Kammern des höheren Raumes abtrennen, sogenannte Anamorphe, Verzerrungen, welche aber die Wandungen nicht ausfüllen, sondern selbst im ungünstigsten Falle nur zur Dimension $n_p(\alpha+3)-2$ ansteigen.

Sie mögen sich folgendes concrete Bild machen. Nehmen Sie den R_3 und als Wandungen die 6 Ebenen eines Würfels. Für diese wäre dann etwa $D=0$. Den Kanten des Würfels aber würden die höheren Singularitäten entsprechen.

Dies ist die Idee, an die sich der folgende Satz anschließt, der für das Weitere fundamental ist.

Wir wollen uns mit einer singularitätenfreien Curve beschäftigen und uns also im repräsentierenden Raum einen Punkt außerhalb der Fläche $D=0$ geben. Durch continuierliche Abänderung der Coefficienten in der algebraischen Curve gelangen wir von da nach

einem andern Punkt, wobei wir, wenn wir einen gegebenen Endpunkt erreichen wollen, wohl gegebenenfalls eine endliche Zahl von Windungen, aber nicht die Ornamente auf ihnen werden durchsetzen müssen. Anders ausgesprochen:

Man kann von jeder singularitätenfreien Curve zu jeder andern singularitätenfreien Curve in der Weise kontinuierlich übergehen (durch Zwischenschaltung anderer Curven), dass man von singulären Vorkommnissen nichts Anderes zwischendurch antrifft, als eine endliche Anzahl von Malen eine Curve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt (mag dieser nun reelle oder imaginäre Äste haben).

Der somit aufgestellte Satz, bezw. die Auffassung, die ihm zugrunde liegt, ist der Kern unserer Betrachtung. Wir werden fragen: Ist diese Auffassung mit den Ideen der gegenwärtigen Vorlesung verträglich?

Wenn wir es nicht mit algebraischen Flächen, sondern mit beliebigen Flächen zu thun hätten, so wären die Schlüsse nicht statthaft, wie schon das Beispiel der Peano-Curve zeigt, die ein Ebenenstück ganz ausfüllt. Wenn wir aber dem Curvenbegriff noch weitere Bedingungen auferlegen, so haben wir schon in der Jordan-Curve eine solche Curve, die die Ebene in zwei

Inneres und Äußeres kennt. Wir haben es nun gar mit algebraischen Curven und Flächen zu thun, so daß wir, so gewiß eine genauere Überlegung hier wünschenswert ist, doch ohne weiteres folgendes behaupten können:

Die allgemeinen Zusammenhangsverhältnisse der mehrdimensionalen Räume, von denen wir sprechen, daß nämlich eine Fläche sie eine Wandung wirkt, eine Curve aber nicht, werden bei algebraischen Curven und Flächen sicher getroffen.

Es wäre aber doch die Frage, weshalb oben, als von der Zahl der Kammern gesprochen wurde, das Wort „endlich" gebraucht werden konnte. Zugegeben, daß die Wendungen den Raum in Kammern trennen, weshalb sollen diese in endlicher Zahl vorhanden sein? Dies ist ein weiterer Punkt, an dem man zweifeln könnte. Ich sage hier so: Wären unendlich viele Kammern vorhanden, so müßte es eine Häufungsstelle geben und dieses erweist sich mit den Eigenschaften der algebraischen Funktionen unverträglich. Ich kann dies hier im Einzelnen nicht durchführen, recapitulire aber noch einmal das Gesagte:

Unsere erste Überlegung geht dahin, daß der Raum überhaupt in getrennte Kammern zerlegt wird. Die zweite Überlegung bezieht sich darauf, daß deren Anzahl

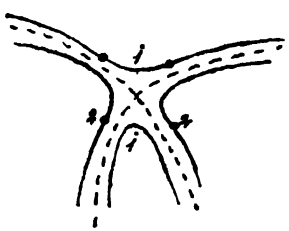
endlich ist.

Nachdem wir so die allgemeinste geometrische Grundlage für die spätere Entwickelung haben, fragen wir:

Wie gestaltet sich im Reellen der Übergang, der darin besteht, daß ich eine algebraische Curve ohne Doppelpunkt durch continuierliche Abänderung der Coefficienten in eine Curve mit einem einfachen Doppelpunkt (der die Klasse nur um 2 Einheiten reduziert) verwandele und dann wieder in eine Curve ohne singulären Punkt?

Ich mache da zunächst die empirische Figur, orientiere mich an dieser und sehe dann zu, wie ich hieraus exakte Sätze für die algebraische Curve gewinne. Wir schliessen uns hiermit an die früher bezeichnete, charakteristische Wendung des Gedankenganges von pg. 366 an.

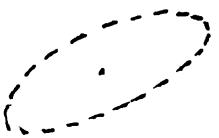
In der nebenstehenden Figur liegt folgendes vor:



Die Curve mit Doppelpunkt entsteht, indem die beiden Äste der Curve 1 ohne Doppelpunkt von oben nach unten kommend sich im Doppelpunkte verschmelzen, um hernach bei der Curve 2, nach rechts und links wieder auseinanderzutreten.

Der allgemeine Habitus der Figur wird auch bei den algebraischen Idealcurven bestehen bleiben. Unsere Frage richtet sich nur auf diejenigen Dinge, welche beim Grenzübergange nicht mehr in die Anschauung fallen, weil sie sozusagen mikroskopisch werden.

Dabei habe ich durch die Figur nur erst einen von 2 möglichen Fällen erläutert. Ein zweites coordiniertes Vorkommen ist dies, daß ein Oval einer Curve sich auf einen „isolirten" Doppelpunkt zusammenzieht und dann verschwindet (wie die nebenstehende Figur erläutert).



Jetzt fragen wir immer noch im empirischen Gebiete, nach den Wendungen. Aus der ersten Figur lesen wir folgende merkwürdige Thatsache ab:

Der Doppelpunkt absorbiert in dem Augenblick, wo er entsteht, zwei reelle Wendungen und giebt dieselben, wenn er verschwindet, wieder von sich. Oder etwas anders ausgesprochen:

Die Curven 1 und 2 haben beide in der Nähe des Doppelpunktes zwei Wendungen, die in der Grenze in den Doppelpunkt selbst hineinfallen.

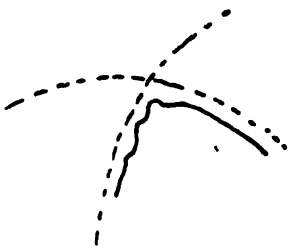
Im zweiten Falle aber heißt es:

Wenn andererseits ein Oval auf einen isolirten

Doppelpunkt sich zusammenzieht und deren verschwindet, so sind (wenn die Sache so liegt, wie gezeichnet) reelle Windungen daran überhaupt nicht beteiligt.

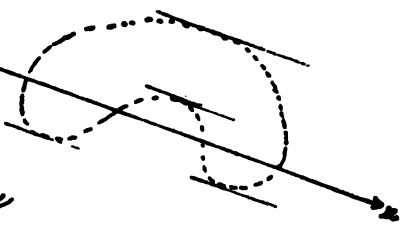
Was läßt sich nun über die entsprechenden Dinge bei den algebraischen Idealcurven aussagen? Ihre Besonderen (um an den letzten Satz anzuknüpfen), wenn bei einer algebraischen Curve ein isolierter Doppelpunkt durch continuierliche Änderung eines Ovals hervorkommt, wird auch dann das Oval unmittelbar vorher im allgemeinen keine reelle Windungen haben und werden? Dabei heißt „im allgemeinen", daß wir das Eintreten höherer algebraischer Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von $f=0$ neben $D=0$ ausschließen. Insbesondere soll also der Doppelpunkt die Classe der Curve nur um zwei Einheiten reducieren. Übrigens aber denken wir hier an die Möglichkeit, daß bei der algebraischen Curve sich in dem in Betracht kommenden Falle möglicherweise ein geschlängeltes Oval in den Doppelpunkt zusammenzieht.

Ebenso können wir für unseren ersten Fall sagen: Auch im Falle eines Doppelpunktes mit reellen Ästen



könnten bei einer algebraischen Curve außer den beiden Wendungen, die gemäß unserer Figur sicher vorhanden sind, möglicherweise noch weitere Wendungen in den Doppelpunkt hineinrücken bezw. aus ihm hervorgehen (vergl. die obenstehende Figur). Die Frage ist, ob man behaupten kann, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

Den hier erforderlichen Beweis gebe ich am Beispiel des Ovals, weil er hier am bequemsten ist. Ich nehme das Oval mit 2 Wendungen und behaupte hierauf bezüglich:



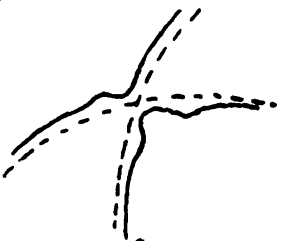
Wenn das Oval 2 Wendungen hat, dann gibt es einen Punkt y außerhalb des Ovals, von dem aus 4 Tangenten an das Oval zu legen sind.

Zunächst kann man eine gerade Linie finden, die das Oval in 4 Punkten schneidet. Man braucht nur 2 Punkte des concaven Curvenzuges, der zwischen den beiden Wendepunkten liegt, durch eine Gerade zu verbinden (vergl. die Figur). Wählen wir diese Gerade als x-Axe und betrachten die Ordinaten $\perp$ zur

Axe, so zeigt sich, daß jedes der 4 Stücke, in welche unser Oval durch die x-Axe geteilt wird, mindestens ein Maximum oder Minimum der Ordinate hat, sodaß an unser Oval 4 der x-Axe parallele Tangenten existieren. Der unendlich ferne Punkt der x-Axe ist also ein solcher Punkt, von dem aus mindestens 4 reelle Tangenten an das Oval gehen. Wir werden durch eine leichte Modifikation dieser Construktion ein ganzes Gebiet von Punkten y erhalten.

Und von hier aus kommen wir nun zu einem Widerspruch. Zieht sich nämlich unser Oval in einen isolierten Doppelpunkt zusammen (indem es bis zur Grenze hin seine Wendepunkte behält), so fallen für alle in Betracht gezogenen Punkte y offenbar alle 4 Tangenten in die Verbindungsgerade $\overline{xy}$; unser Doppelpunkt absorbiert also für diese Punkte y 4 reelle Tangenten. Wir schließen, daß er für <u>jeden</u> Punkt y, algebraisch zu reden, 4 Tangenten absorbiert, während wir ausdrücklich voraussetzten, daß unser Doppelpunkt die Klasse nur um 2 Einheiten reduzieren solle. Also kann die Annahme eines Ovals, das bis zur Grenze hin 2 Wendungen oder noch mehr besitzt, nicht stattfinden.

Das ganz Entsprechende können wir für einen Doppelpunkt mit reellen Ästen machen:



Wenn bei den Nachbarcurven (wie ich die Curven in der Nähe der Curve mit Doppelpunkt nennen will) mehr als die beiden notwendigen Wendungen vorhanden wären, denn würde beim Übergang von den Nachbarcurven zur Curve mit Doppelpunkt auch hier die Klasse um mehr als 2 Einheiten erniedrigt gegen unsere ausdrückliche Annahme, daß die Reduktion nur 2 Einheiten betragen soll. Somit haben wir folgenden bestimmten Satz bewiesen:

Wenn eine algebraische Curve einen reellen Doppelpunkt bekommt, der die Klasse um 2 Einheiten erniedrigt, so unterscheide man, ob die Äste des Doppelpunktes reell oder imaginär sind. Im ersten Falle werden vom Doppelpunkte 2 reelle Wendungen, im zweiten Falle keine reellen Wendungen absorbiert.

Die Ableitung dieses Satzes ist im Sinne der gegenwärtigen Vorlesung gewissermaßen das Centrum unserer auf die Wendepunkte der algebraischen Curven bezüglichen Überlegungen, weil nämlich dabei der Vergleich zwischen dem, was anschaulich hervortritt, und dem, was begrifflich aus den Definitionen folgt, am klar-

den herausgearbeitet ist.

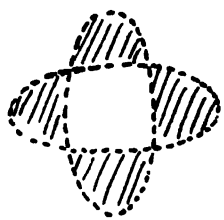
Ich gehe nun zu einem einfacheren Teile der Überlegung weiter, bei dem es unsere Aufgabe sein soll, Beispiele von algebraischen Curven zu konstruieren, bei denen unsere zu beweisende Relation $\nu' + 2t^{II} = n(n-2)$ thatsächlich erfüllt ist. Haben wir erst die Beispiele, so überzeugen wir uns davon, daß die Relation allgemein gilt, indem wir nachweisen, daß sie bei der allgemeinsten von uns zu betrachtenden continuierlichen Abänderung der Curve ungeändert weiter bestehen bleibt.

Die in Rede stehende Construktion von Beispielen gelingt am einfachsten, wenn man sich erstens Curven mit möglichst vielen Doppelpunkten construiert, die in niedere Bestandteile zerfallen, sodaß man die Gesamtgestalt der Curve ohne weiteres übersieht, und zweitens von den so erhaltenen Curven zu singularitätenfreie Nachbarcurven übergeht, wo unsere Relation dann befriedigt sein wird.

Man hat hier zweckmäßigerweise zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden.

Sei n zunächst gerade.

Wir wählen vorab $n = 4$, wo sich die Dinge, die ich Ihnen



vorführen möchte, noch bequemer zeichnen lassen.

Wir zeichnen einfach 2 congruente Ellipsen S_1 und S_2 mit demselben Mittelpunkt, unter einem Winkel von 90° gegeneinander gedreht, die sich in 4 reellen Punkten kreuzen. Denn ist $S_1 S_2 = 0$ unsere ausgeartete C_4. Diese hat, wie Sie schon, 4 reelle Doppelpunkte, eben die Kreuzungspunkte der beiden Ellipsen, und kann auch algebraisch nicht mehr als diese 4 haben (nach dem Bézout'schen Theorem), also alle Doppelpunkte der Curve sind reell mit reellen Ästen.

Die Classe unserer Curve ist, da jede der Ellipsen von der 2ten Classe ist, $k = 4$. Bei der allgemeinen C_4 gehen $4 \cdot 3 = 12$ Tangenten von einem Punkte y außerhalb an die Curve. Es hat demnach eine Erniedrigung der Classe um $12 - 4 = 8$ Einheiten stattgefunden, woraus folgt, daß jeder der 4 Doppelpunkte unserer C_4 die Klasse der C_4 um 2 Einheiten erniedrigt hat.

Weiter orientieren wir uns über die Doppeltangenten unserer C_4. Nach der allgemeinen Theorie müssen es $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-4)$, d. h. 28 sein. Diese 28 Doppeltangenten werden in der Figur vorgestellt durch die 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen, dann aber weiter durch die 6 Verbindungsgeraden der 4 Doppelpunkte, von denen jede 4fach zu zählen ist. (Letzteres schließt

man daraus, daß man die 6 Verbindungsgeraden zunächst mit der Multiplicität α einführt, so daß sie sämtliche Doppeltangenten repräsentieren, dann überlegt, daß außer diesen Verbindungsgeraden nur noch die 4 gemeinsamen Tangenten der Ellipsen als Doppeltangenten auftreten, und nun $4+6\alpha = 28$ setzt. Übrigens werden wir sofort noch eine andere Bestätigung für diese Multiplicität 4 bekommen).

Fügen wir noch hinzu, daß unsere besondere C_4 keine Wendepunkte hat, so kennen wir dieselbe für unsere Zwecke vollständig. Wir gehen jetzt zu einer Nachbarcurve, indem wir $R_1 R_2 = \pm\varepsilon$ setzen, wo ε eine kleine positive Größe ist.

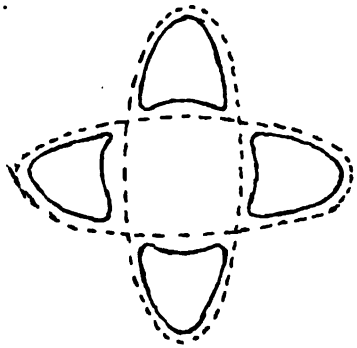
Um dies durchzuführen, schreiben wir etwa:

$$R_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad , \quad R_2 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 .$$

Wir sehen dann: R_1 ist im Innern der Ellipse R_1 kleiner als Null, im Äußern > 0, ebenso für R_2, so daß $R_1 R_2$ in den schraffierten Teilen, die den beiden Ellipseninnern nicht gemeinsam sind, negativ wird (vergl. die Figur auf pg 398).

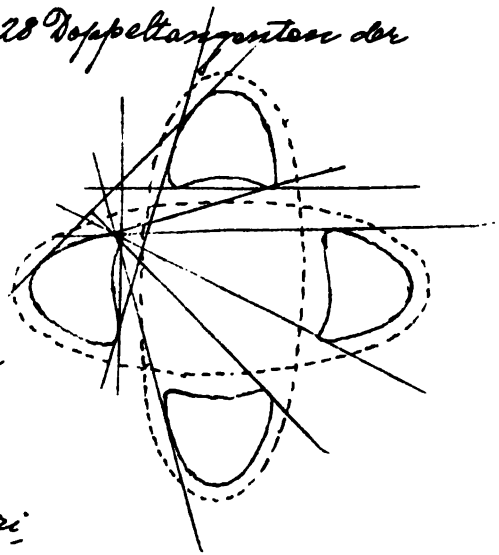
Wählen wir nun zunächst das untere Zeichen: $R_1 R_2 = -\varepsilon$, so müssen wir eine ganz im schraffierten Gebiete verlaufende, singularitätenfreie Nachbarcurve zeichnen. Das geschieht so, daß wir 4 Ovale in

diese Gebiete hineinkreuzen (vergl. die nebenstehende Figur).



Sie sehen, wir erhalten für unsere Nachbarcurve genau 8 reelle Windungen ($w' = 8$), wie es sein muss, da jeder Doppelpunkt nach unserm allgemeinen Satz 2 Windungen abgiebt und die Ellipsen von Hause aus keine Windungen besitzen.

Wie steht es aber mit den 28 Doppeltangenten der jetzt konstruierten Curve?



Diese lassen sich im vorliegenden Falle sämtlich bequem nachweisen. Zunächst geben die gemeinsamen 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen ohne weiteres 4 gemeinsame Tangenten unserer Ovale, also 4 reelle Doppeltangenten, und im Übrigen spaltet sich jede der 6 Verbindungsgeraden von 2 Ellipsenschnittpunkten, wie die Figur zeigt, in 4 reelle Doppeltangenten, womit wir im Ganzen die 28 überhaupt vorhandenen erhalten. Isolierte Doppeltan-

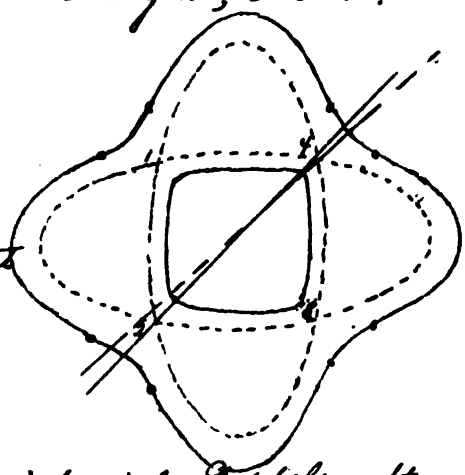
genten treten bei unserer Curve nicht auf, da es außer den 28 jetzt konstruierten (die sämtlich reelle Berührungspunkte haben) nach der allgemeinen Theorie keine Doppeltangenten mehr giebt. Somit ist $t''=0$ und wir erhalten in der That:

$$w' + 2t' = 8 = 4.2 = n(n-2).$$

Also für unser erstes Beispiel stimmt die Relation.

Etwas anders werden die Verhältnisse, wenn wir die zweite Nachbarcurve $A_1 b_2 = +\varepsilon$ wählen; das Resultat ist aber, soweit es die Summe $w'' + 2t''$ angeht, dasselbe.

Die Curve setzt sich aus 2 Zügen, einem äußeren mit 8 Wendungen und einem inneren ohne Wendungen zusammen (vergl. die Figur). Man nennt eine solche Curve, wo der eine Zug den anderen vollkommen umschließt, eine Gürtelcurve.



Zunächst hat auch hier wieder jeder Doppelpunkt 2 reelle Wendungen entstehen lassen. Ferner sind auch hier die 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen in eigentliche Doppeltangenten übergegangen. Was aber die 24 übrigen Doppeltangenten angeht, die der allgemeinen Theorie zufolge bei der Curve vorhanden

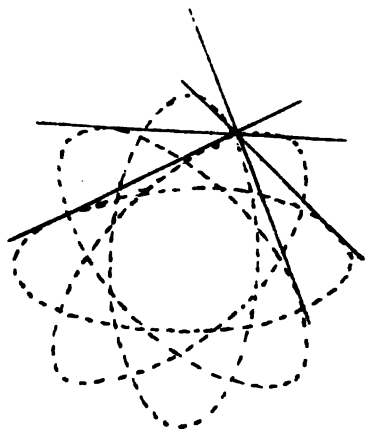
sein sollen, so sind diese notwendig imaginär. Ziehen wir z. B. die Verbindungsgerade $\overline{24}$ der beiden Schnittpunkte 2 und 4 unserer ursprünglichen Ellipsen (siehe Figur) (aus der doch 4 Doppeltangenten hervorgehen sollen), so sehen wir, daß $\overline{24}$, auch wenn wir es ein wenig gegen seine ursprüngliche Lage variieren, stets 4 ganz auseinander liegende reelle Schnittpunkte mit der Curve hat, die nicht zu je 2 zusammenfallen sollen, also „in der Nähe" von $\overline{24}$ Doppeltangenten vorhanden sein, so können diese nur imaginär sein. Somit haben wir den Schluß:

Unsere Gürtelcurve hat 4 reelle Doppeltangenten mit je 4 reellen Berührungspunkten und außerdem $2f$ imaginäre Doppeltangenten, aber nicht etwa isolierte Doppeltangenten.

In unserer Schreibweise ist also $t' = 0$ und wieder ist die Relation $w' + 2t' = 8$ befriedigt.

Damit ist der Fall $n = 4$ vorläufig erledigt, d. h. wir haben bei $n = 4$ Beispiele von Curven construiert, bei denen unsere Relation stimmt. Um für höhere Werte von n von geradem Charakter dasselbe zu leisten, konstruieren wir uns zunächst $n/2$ congruente Ellipsen mit demselben Mittelpunkt, die gegen einander unter einem Winkel $2\pi/n$ geneigt sind. Z. B. nehmen

wir 4 Ellipsen wie in der nebenstehenden Figur, so erhalten wir eine C_8. Hier machen wir nun bei den 10 erhaltenen C_n dieselbe Abzählung wie vorhin bei der C_n.



1/ Wieviel Doppelpunkte sind vorhanden?

Jede der Ellipsen schneidet die übrigen in 4 reellen Punkten, wir haben also im ganzen

$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ Doppelpunkte d.h.

Unsere Curve hat $2\frac{n}{2}(n-2)$ reelle Doppelpunkte, dieselben besitzen sämtlich reelle Äste.

2/ Ebenfalls berechnen wir die Klasse der Curve.

k ist offenbar n, denn an jede Ellipse gehen 2 Tangenten und es giebt $\frac{n}{2}$ Ellipsen. Gehen wir auf die allgemeine Formel zurück, so ist

$k = n(n-1) -$ (Reduktion, die aus den Doppelpunkten herrührt). Letztere berechnet sich also zu

$R = n(n-2)$ d.h.

Die Klasse unserer Curve ist gegenüber der Klasse der singularitätenfreien Curve um $n(n-2)$ Einheiten reduziert, sodass wieder auf jeden Doppelpunkt eine Reduktion von 2 Einheiten fällt.

3/ Drittens weisen wir die $\frac{n}{2}(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten der Curve nach. Wir haben

a/ bei je 2 Ellipsen 4 gemeinsame Tangenten, die als Doppeltangenten der Gesamtcurve anzusehen sind. Das giebt im Ganzen

$$\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} \times 4 = \frac{n(n-2)}{4} \text{ Doppeltangenten,}$$

b/ aus jeder Verbindungsgeraden zweier Schnittpunkte zweier Ellipsen 4 Doppeltangenten. Das giebt:

$$4 \cdot \frac{\frac{n}{2}(n-2) \cdot \left\{\frac{n}{2}(n-2)-1\right\}}{2} \text{ Doppeltangenten}$$

c/ endlich kommt noch eine 3te Categorie Doppeltangenten dadurch hervor, daß von jedem Schnittpunkte zweier Ellipsen an die anderen Ellipsen, die sich nicht in dem Punkte kreuzen, 2 Tangenten möglich sind. Diese Tangenten zählen als Doppeltangenten der Gesamtcurve doppelt (wie wieder auf verschiedene Weisen herausgebracht werden kann). Wir haben $\frac{n}{2}(n-2)$ Schnittpunkte von Ellipsen und von jedem derselben $\frac{n-4}{4} \cdot 2$ Tangenten der genannten Art (die sämtlich reell sind). Das giebt also

$$\frac{n}{2}(n-2) \cdot \left(\frac{n}{2}-2\right) \cdot 2 \cdot 2 \text{ Doppeltangenten der Gesamtcurve.}$$

Durch Addition der gefundenen 3 Arten Doppeltangenten kommt als Gesamtzahl der Doppeltangenten:

$$\frac{n}{2}(n-2)\left\{1+n^2-2n+2n-2-8\right\} = \frac{n}{2}(n-2)(n^2-9).$$

Wir haben damit die sämtlichen $\frac{n}{2}(n-2)(n^2-9)$ Doppeltan-

genten der allgemeinen Curve an unserer speziellen Curve nachgewiesen. Diese Doppeltangenten sind zum Teil zu u, zum Teil zu v zusammengerückt, aber dabei alle noch mit reellen Berührungspunkten.

4/ Wendepunkte sind bei unserer ausgearteten Curve natürlich nicht vorhanden.

Von dieser ausgearteten Curve n^{te} Ordnung, die aus $n/2$ übereinander gelagerten Ellipsen $R_1 = 0, \ldots R_{n/2} = 0$ besteht, also die Gleichung

$$R_1 R_2 \ldots R_{n/2} = 0$$

hat, gehen wir jetzt zu einer Nachbarcurve

$$R_1 R_2 \ldots R_{n/2} = \pm\varepsilon \quad \text{über.}$$

Die $n/2\,(n-2)$ Doppelpunkte der ausgearteten Curve gehen hier $n(n-2)$ reelle Wendungen.

Die Doppeltangenten aber können zum Teil reell und imaginär werden; es hängt dies von der Art des Grenzüberganges zur Nachbarcurve ab, d.h. davon ab, ob wir das untere oder obere Zeichen von ε wählen. Ganz gewiß aber entstehen keine isolierten Doppeltangenten, da die Berührungspunkte der Doppeltangenten (soweit eben die Doppeltangenten reell ausfallen) durch die Gestalt der Ausgangsfigur als reell vorgezeichnet sind.

Damit sind wir am Ziel; wir haben

$$w' = n(n-2), \quad t' = 0 \quad \text{und also}$$

$w' + 2t'' = n(n+2)$ w.g.b.w.

Dies Beispiel für ein beliebiges gerades n war eine Verallgemeinerung der Überlegung bei $n=4$, nur daß bei der Aufzählung der Doppeltangenten eine neue Kategorie c auftritt.

Ich verlasse nunmehr diesen Fall und betrachte ungerades n, indem ich auch hier mit dem niedrigsten Falle, bei dem die allgemeine Überlegung hervortritt, nämlich $n=5$, beginne.

Wir arrangieren die Überlegung der vorigen ähnlich, indem wir zuerst eine ausgeartete C_5 konstruieren, bei der wir die Verhältnisse klar übersehen, und von hier aus zu einer allgemeinen C_5 aufsteigen. Die Relation, welche sich dabei ergeben soll, lautet

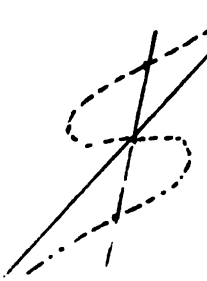
$$w' + 2t'' = 15.$$

Wir setzen unsere spezielle C_5 aus einer C_3 $(P=0)$ und einer Ellipse $L=0$ zusammen, sodaß ihre Gleichung

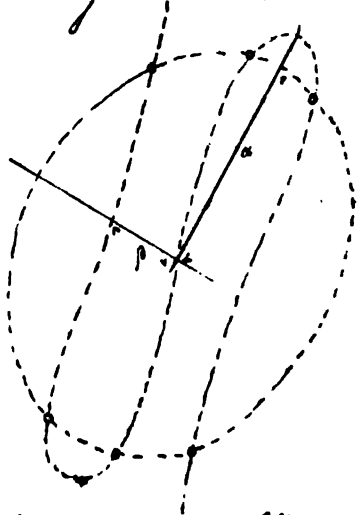
$$P.L = 0$$

wird. Die Frage ist wie wir die C_3 und C_2 wählen wollen, damit wir für unsere Zwecke gute Verhältnisse bekommen.

Ich hob bereits hervor, daß bei einer C_3 stets ein unpaarer Curvenzug auftritt, den wir hier insbesondere so zeichnen wollen,



dass nur eine Asymptote vorhanden ist. Man kann den Curvenzug nun eine zur Asymptote symmetrische Gestalt geben, sodass ein Wendepunkt in den Schnitt O der Asymptote mit der Curve fällt, die beiden anderen liegen dann auf einer Graden durch O gleichweit nach entgegengesetzten Seiten.



Durch Auseinanderziehen d. h. durch eine geeignete affine Transformation erreicht man es, dass die Curve eine für unsere Zwecke besonders geeignete Gestalt erhält, wie sie in nebenstehender Figur vorliegt. (Es kommt für uns hier nicht darauf an, die sämtlichen Gestalten der C_3 zu übersehen, sondern nur eine für unseren Zweck besonders bequeme C_3 hervorzuheben).

Nennen wir den kleinsten Abstand des Punktes O von den Flanken der Curvenschleifen β, den größten von den Scheiteln der Schleifen α (vgl. die Figur) und wählen zwei Größen a und b so, dass

$$a < \alpha \quad b > \beta \quad \text{aber} \quad a > b,$$

so erhalten wir, wenn wir a und b als Halbaxen einer um O als Mittelpunkt herumgelegten Ellipse wählen, alle 6 nach dem Bézout'schen Theoreme möglichen

Schnittpunkte unserer C_3 mit der Ellipse als reelle Punkte. Dies wird gelten, wie wir auch die Ellipse um O drehen d.h. welches Azimut wir für die Hauptaxen voraussetzen wollen. Andererseits schneiden sich 2 solche Ellipsen denn selber noch in 4 reellen Punkten, wodurch die Möglichkeit geboten ist, auch höhere Curven $C_7, C_9, \ldots$ in zweckmäßiger Weise zu konstruieren (was ich weiterhin nicht mehr besonders ausführe).

Bleiben wir hier bei unserer Curve C_5, wo ich die Dinge völlig conkret bezeichnen kann.

Zunächst die Classe.

Die Classe der C_3 ist offenbar $= 3 \times 2 = 6$

— — — C_2 — — $= 2 \times 1 = 2$, daher

— — unserer Curve $= 6 + 2 = 8$. Da nun nach der allgemeinen Theorie $k_5 = n(n-1) = 5 \cdot 4 = 20$ ist, so haben wir eine Reduktion um 12 Einheiten, sodaß auf jeden Doppelpunkt wieder eine Reduktion von 2 Einheiten kommt.

Die Zahl der reellen Wendepunkte ist 3, da die C_3 3, die Ellipse aber keine Wendepunkte besitzt.

Weiter gilt es jetzt an unserer Curve die

$\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) = 120$ Doppeltangenten

des allgemeinen Falls nachzuweisen.

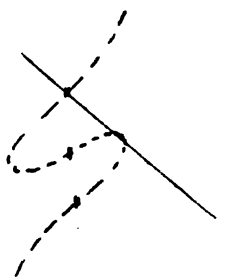
Da sind zunächst die gemeinsamen Tangenten von

C_3 und C_2. Dies giebt, da C_3 von der 6ten Klasse, C_2 von der 2ten Classe ist, 12 Doppeltangenten der C_5. Sind sie reell oder imaginär? Jedenfalls sind sie nicht alle reell, wie ein Blick auf die Figur (pg 408) zeigt. Ohne dies näher zu entwickeln, können wir behaupten:

Diejenigen unserer 12 gemeinsamen Tangenten von C_3 und C_2, die reell sind, haben auch reelle Berührungspunkte, nicht etwa conjugiert imaginäre, sodaß keine sog. isolierten Doppeltangenten auftreten.

Es kommt dies dadurch heraus, daß die Berührungspunkte einer solchen gemeinsamen Tangente, die doch auf der C_3 und C_2 verteilt liegen sollen, getrennten algebraischen Bedingungen genügen.

Weiter lassen sich von den Doppelpunkten unserer Curve allerdings nicht an die Ellipse, wohl aber an die C_3 noch Tangenten legen, die die Curve in einem anderen Punkte als in dem bezüglichen Doppelpunkt berühren; es sind dies je 4 Tangenten; die



Zahl 4 kommt so heraus, daß von einem beliebigen Punkt, der nicht auf der C_3 liegt, 6 Tangenten an dieselbe gehen, wenn der Punkt aber auf die C_3 rückt, offenbar 2 Tangenten von diesen 6 in seine eigene

eigene Tangente zusammenfallen, sodaß noch $6-2=4$ bleiben. Das giebt im ganzen 4×6 Tangenten (von jedem der 6 Doppelpunkte 4 Tangenten). Bei der Auflösung der Doppelpunkte erhält man von hieraus, da jede unserer Tangenten (wie im Falle des geraden κ) 2 Doppeltangenten der allgemeinen C_5 ergiebt, $4\times 6\times 2 = 48$ Doppeltangenten. Ob diese im Einzelnen reell oder imaginär sind, das wissen wir wieder nicht und lassen es ununtersucht. Aber eins wissen wir wieder:

Diese 48 Doppeltangenten, die wir bei der Nachbarcurve $\varphi R = \pm\varepsilon$, soweit sie reell ausfallen, getrennt vor Augen sehen werden, sind sicher keine isolierten Doppeltangenten. Denn sie müssen den einen Berührungspunkt in der Nähe des entsprechenden Doppelpunktes, den andern entfernt davon haben, weil es bei der ausgearteten Curve so ist.

Als letzte Categorie von Doppeltangenten kommen die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte untereinander. Es giebt $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ Verbindungsgeraden. Jede ist aber als Doppeltangente mit der Multiplicität 4 zu zählen (wie im Falle eines geraden κ), sodaß wir den Satz haben:

Die 15 Verbindungsgeraden der 6 Doppelpunkte ergeben für die Nachbarcurve $15\times 4 = 60$ Doppeltangenten.

Wir fahren gleich fort:

Soweit die so entstehenden Doppeltangenten überhaupt reell sind, sind sie wieder nicht isoliert, da die Berührungspunkte allemal doch in der Nähe der beiden Doppelpunkte, die wir ursprünglich geradlinig verbanden, zu suchen sind.

Mit dieser Aufzählung der Doppeltangenten (12 + 48 + 60) sind sämtliche 120 Doppeltangenten der allgemeinen Theorie bei unserer Curve nachgewiesen.

Nun haben wir alles beisammen, um zu der Nachbarcurve $\mathfrak{P}\mathfrak{R} = \pm\varepsilon$ überzugehen.

An reellen Wendungen haben wir offenbar die 3 Wendungen der C_3 und je 2 aus den 6 Doppelpunkten d.h. $3 + 2\times 6 = 15$.

Soweit reelle Doppeltangenten vorhanden sind, sind sie nicht isoliert, also $t' = 0$.

Also haben wir auch hier richtig: $w' + 2t' = 15 = 5 \cdot 3 = n(n-2)$.

Ähnlich ist es bei beliebigen ungeraden n; ich unterlasse die Ausführung (bei der wir von einer aus geraden C_n ausgehen, die aus einer C_3 und $\frac{n-3}{2}$ einer der unter gleichen Azimuten kreuzenden reellen Ellipsen besteht).

Jedenfalls bekommen wir auch bei beliebigen unge-

raden n Beispiele singularitätenfreier Curven, bei denen $\nu' + 2t'' = n(n-2)$ ist.

Nachdem wir uns diese Beispiele construiert haben, kehren wir wieder in die allgemeine Überlegung des zu führenden Beweises ein:

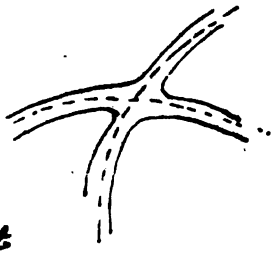
Wir wissen, daß wenn wir von dem repräsentierenden Punkt einer singularitätenfreien C_n zu dem repräsentierenden Punkt einer zweiten singularitätenfreien C_n übergehen wollen, wir das stets so einrichten können, daß wir die Mannigfaltigkeit $D = 0$ nur an solchen einzelnen Stellen durchsetzen, denen solche C_n entsprechen, die keine andere Singularitäten besitzen als einen einzelnen Doppelpunkt, der die Classe um 2 Einheiten reduziert. Nun möchten wir wissen, was aus der für i bestehenden Relation $w' + 2t'' = n(n-2)$ bei der Wanderung nach 2 hin wird. Überlegen wir uns, was überhaupt verloren resp. gewonnen werden kann.

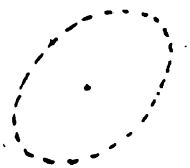
Man kann zunächst meinen, daß ein Verlust resp. Gewinn an Wendungen w' oder Doppeltangenten t'' eintritt, wenn man durch eine Curve mit gewöhnlichem Doppelpunkt hindurchgeht. Dies ist aber nicht der Fall, vielmehr gilt der Satz:

Die Anzahl $w' + 2t''$ bleibt, wenn wir in verabre-

derten Weise die Mannigfaltigkeit $D=0$ durchsetzen, unge-
ändert.

Wir müssen dabei natürlich in Betracht ziehen, dass der bei der C_m auftretende gewöhnliche Doppelpunkt ein Doppelpunkt mit reellen Ästen oder ein isolierter Doppelpunkt sein kann.





Im ersteren Falle gehen offenbar 2 reelle Windungen der Curve beim Übergang zur Curve mit Doppelpunkt verloren, treten aber alsbald wieder hervor, sobald wir den Doppelpunkt auflösen, sodass also ω' ungeändert bleibt.

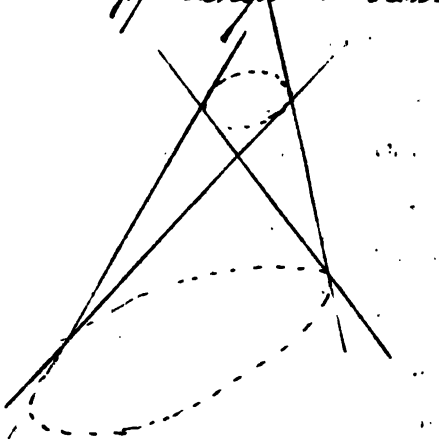
Im II Falle sind überhaupt keine reellen Windungen beim Grenzübergange beteiligt, sodass von einer Änderung des ω' von vornherein keine Rede sein kann.

Damit ist der erste Schritt erledigt:

Beim Überschreiten einer Curve mit Doppelpunkt, der die Classe um 2 Einheiten reduziert, erleidet die Zahl ω' der Windungen der singularitätenfreien Curve keine Änderung.

Genau so erleidet aber auch t' keine Änderung. Wohl ändert sich allgemein zu jeden die Zahl der reellen Dop-

peltangenten, aber die hieroon betroffenen Doppeltangenten sind keine isolierten. Man überlege sich dies etwa an nebenstehender Figur, wo 4 Doppeltangenten beim Übergang des ovalen Ovals in einen isolierten Punkt und nachherigem Verschwinden dieses Punktes imaginär werden, aber keine Rede davon ist, daß sie etwa reelle isolierte Doppeltangenten gewesen wären oder würden.



Genauso ist es bei den reellen Doppeltangenten, die ein Doppelpunkt mit reellen Ästen gegebenenfalls absorbiert. Also:

Das Passieren der Curve mit Doppelpunkt kann in der Zahl der reellen Doppeltangenten der Curve eine große Änderung hervorrufen, aber die Zahl der reellen isolierten Doppeltangenten wird davon nicht berührt.

Nehmen wir zusammen, was wir über w' und t' sagten, so sehen wir, daß bei dem in Rede stehenden Übergang in der Tat die Summe $w' + 2t'$ vorher und nachher dieselbe bleibt.

Hiermit haben wir das Hindurchgehen durch die Fläche $D = 0$ erledigt. Natürlich kann die Sache, wenn

wie an Stellen, wo höhere Singularitäten vorliegen, die Fläche durchsetzen, weit complicierter werden. Das Schöne aber ist eben, daß wir die Betrachtung dieser höheren Fälle vollständig vermeiden können. Würde einer sich die Mühe machen, den Einfluß eines Passierens von höheren Singularitäten der Fläche $D=0$ genau zu discutieren, so ist kein Zweifel, daß er schließlich als Endresultat ebenfalls finden würde, daß die Summe $w'+2t'$ nach Überschreitung der Singularität ungeändert geblieben ist. Denn man kann vom Anfangspunkte zum Endpunkte des Weges immer hinkommen, indem man um die höheren Singularitäten von $D=0$ herumgeht.

Wenn also die Summe $w'+2t''$ beim Durchgang durch die Fläche $D=0$ dieselbe bleibt, wie kann sie sich dann überhaupt ändern? Die Vorkommnisse, bei denen dies möglicherweise eintritt, werden von uns nur unter der Bedingung $D \geq 0$ zu betrachten sein. Wäre nämlich zugleich $D=0$, so hätten wir ein „höheres Vorkommniss" vor uns, das wir nach unserer allgemeinen Überlegung immer vermeiden können. Wir haben also folgende präcise Fragestellung vor uns:

Wie kann sich auf dem Wege von einem repräsentierenden Punkt zu einem andern die Zahl $w'+2t''$ möglicherweise ändern, wenn wir berechtigterweise nur Sol-

che Vorkommnisse in Betracht ziehen, die sich durch eine einzelne algebraische Gleichung in den Coefficienten der C_ϱ ausdrücken und wenn wir insbesondere den Fall $D=0$, weil schon erledigt, bei Seite lassen:

Offenbar kann sich die Zahl δ nur noch dadurch ändern, dass auf der singularitätenfreien Curve 2 reelle Verzweigungen zusammenrücken und imaginär werden oder umgekehrt.

Andererseits kann sich t' dadurch ändern, dass entweder 2 isolierte Doppeltangenten zusammenrücken und imaginär werden, oder dass eine isolierte reelle Doppeltangente sich in eine nicht-isolierte doppeltangente verwandelt oder umgekehrt.

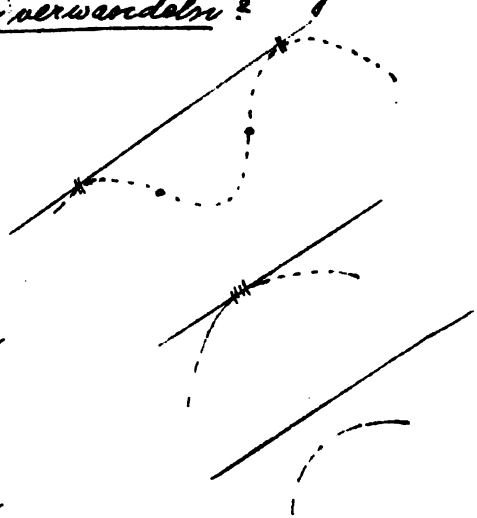
Die erste der beiden hiermit genannten Möglichkeiten für die Änderung der Zahl t' brauchen wir nicht einmal zu berücksichtigen, weil in der Forderung 2 Bedingungen enthalten sind. Fallen nämlich 2 isolierte Doppeltangenten zusammen, so haben wir entweder eine 4-fache Tangente oder eine Tangente, welche an 2 Stellen osculiert (weil doch die beiden conjugiert imaginären Berührungspunkte immer das gleiche Schicksal erleiden müssen).

Die einzige Änderung von t'', die in Betracht kommt, besteht also darin, dass aus einer isolierten Doppelten

gente eine nicht-isolierte Doppeltangente hervorkommt oder umgekehrt.

Und nun stellt sich die Sache erfreulicherweise so, daß die beiden Änderungen von w' und t'', die allein noch zu überlegen sind, notwendig in der Art gleichzeitig eintreten, daß $w' + 2t''$ dabei ungeändert bleibt!

Den hiermit aufgestellten Satz erläutern wir zunächst graphisch an gezeichneten Curven und fragen dann: Läßt sich das, was wir hier sehen, in exakte Sätze über algebraische Ideal-Curven verwandeln?

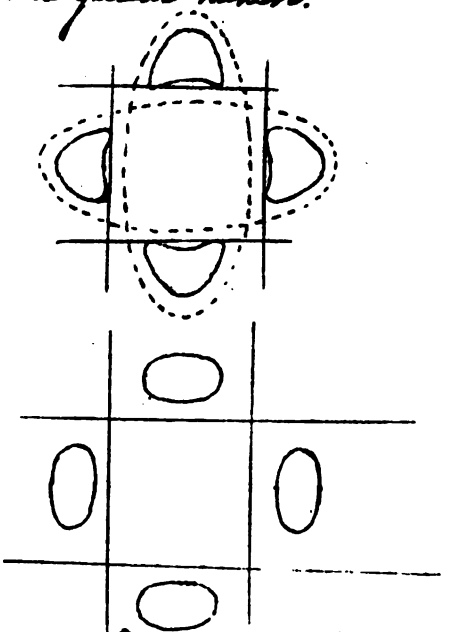


Wir zeichnen einen Curvenzug hin nebenstehend mit 2 reellen Wendungen, lassen diese dann zusammenrücken und schließlich imaginär werden. In der Figur 1 haben wir offenbar eine Doppeltangente mit 2 reellen Berührungspunkten, hieraus wird in Figur 2 eine sog. 4-punktige Tangente und in Figur 3, algebraisch zu reden, eine isolierte Doppeltangente (da doch keine reelle Doppeltangente nur so imaginär werden kann, daß sie zunächst mit einer anderen zusammenfällt, wovon aber im vorliegenden Fall

le gar nicht die Rede ist). Also:

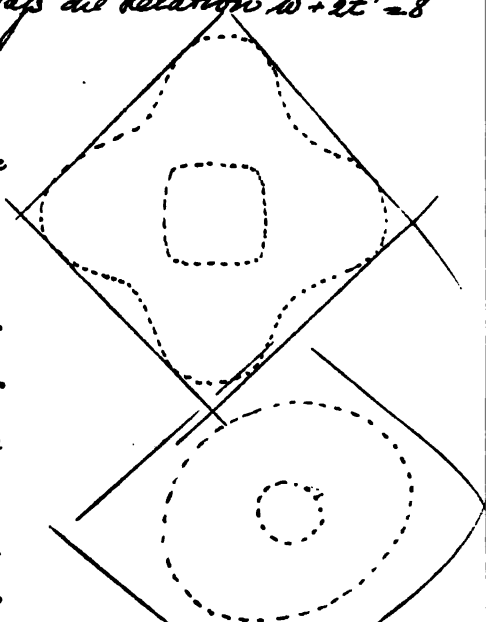
Indem die beiden Wendepunkte zusammenfallen und imaginär werden, rücken auch die Berührungspunkte der Doppeltangenten zusammen und werden imaginär. Die Doppeltangente selbst bleibt bei diesem Übergange reell. Wenn also w' um 2 Einheiten sinkt, wächst t' um eine, wodurch, da t' in der Summe w' + 2t' mit 2 multiplicirt auftritt, die Relation richtig bleibt. –

Darf ich diss zunächst noch an den beiden Gestalten der C_4 erläutern, die wir uns früher hergestellt hatten.



Wir gingen von 2 sich kreuzenden Ellipsen aus und construirten uns einmal die Curve $R_1 R_2 = -\varepsilon$, die aus 4 getrennten Ovalen besteht. Ich richte jetzt die Aufmerksamkeit darauf, dass von diesen 4 Ovalen jedes für sich genommen eine Doppeltangente besitzt (vergl. die Figur). Lassen wir nun ε grösser werden, so können diese Doppeltangenten abgestossen werden, wir erhalten dann ein Bild, wie es die obenstehende Figur zeigt. Hier sind keine reellen Windungen mehr vorhanden, dafür aber 4 reelle

isolierte Doppeltangenten, sodaß die Relation $w' + 2t'' = 8$ richtig bleibt.



Das andere Mal setzten wir $\lambda_1 \lambda_2 = +\varepsilon$ und erhielten die Gürtelcurve (auch zunächst mit 8 reellen Wendungen). Der äußere Curvenzug als solcher besitzt hier 4 Doppeltangenten; wächst ε, so kommt ein Augenblick, wo diese 4 Doppeltangenten in 4 4-punktige Berührungstangenten und darüber hinaus in 4 reelle, isolierte Doppeltangenten übergehen, die den Curvenzug, der jetzt ovalartige Gestalt hat, umgeben, ohne ihn zu treffen. Aber gleichzeitig sind die 8 Wendungen des Curvenzuges verschwunden. Auch hier bleibt also die Relation $w' + 2t'' = 8$ bestehen.

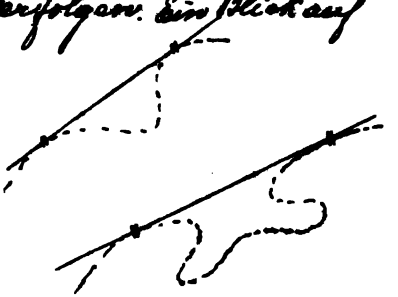
So kommt es bei den Φ_4 thatsächlich heraus. Die Frage ist: Weshalb ist das so, und nicht nur im speciellen Falle bei $n = 4$, sondern immer und bei beliebigem n?

Hierauf sage ich, getreu dem Princip dieser Vorlesung: Zunächst sind die Figuren, die wir bei beliebigem n erhalten, denjenigen, die wir jetzt ins Beispiel betrach

teten, ganz ähnlich. Es kommt aber darauf an zu prüfen, wie so man aus diesen Figuren exakte Schlüsse für die algebraischen Idealcurven ableiten kann.

Ich skizziere dies folgendermaßen:

Es wird sich zunächst darum handeln, gewisse empirische Figuren zu betrachten (vergl. auch die Figur von pg. 418). Irgend ein Curvenzug, der sich nicht durch's Unendliche erstreckt, möge eine Doppeltangente haben, deren Berührungspunkte also nach Durchlaufung eines endlichen Curvenstücks aufeinanderfolgen. Ein Blick auf die Figuren zeigt, daß zwischen den Berührungspunkten mindestens zwei Wendepunkte liegen (die Zahl derselben kann in der That >2 sein). — Umgekehrt wenn wir einen Curvenzug, der ursprünglich keine Wendungen besass, durch Einschiebung seiner Teile mit zwei oder mehr Wendungen versehen, so wird er mindestens eine Doppeltangente bekommen.



Zweitens wird man diese Sätze auf reguläre Idealcurven übertragen, wobei der entscheidende Beweisgrund jedesmal in der richtigen Verwendung des Rolle'schen Theorems (oder des Weierstraß'schen Existenzsatzes betr. das Maximum einer stetigen Funktion) liegt. Hat

der Curvenzug eine Doppeltangente, wie vorhin, so wähle man die x-Axe parallel zur Doppeltangente und denke sich das Curvenstück zwischen den Berührungspunkten durch einen geeigneten Parameter t in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dargestellt. In den Berührungspunkten ist dann $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'}$ gleich Null. Aber y muss im Intervall ein Maximum oder Minimum haben. Dort ist dann abermals $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'}{\varphi'}$ gleich Null. Wir schliessen, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ im Intervall mindestens zweimal verschwindet, und dies war zu beweisen. Entsprechend beweist man den umgekehrten Satz.

Weiters wird man sagen, dass bei algebraischen Curven, wenn man sich auf „allgemeine" Vorkommnisse ihrer Art beschränkt, zwischen den Berührungspunkten einer Doppeltangente, die sich durch allmähliche Änderung der Gestalt des Curvenbogens von diesem abdrücken soll, auch nur zwei Wendungen liegen. Fänden sich dort nämlich mehrere Wendepunkte und man liesse nun den Curvenzug sich so deformieren, dass die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenrücken, so wäre dies ein Vorkommnis <u>höherer Art</u>, das wir bei unseren allgemeinen Betrachtungen bei Seite lassen dürfen.

Die so bezeichneten Punkte ergeben nun zusammen

genommen, daß $w' + 2t'$ bei der algebraischen Idealcurve für die von uns zu betrachtenden Änderungen derselben constant ist und damit, daß es für die singularitätenfreien Curven C_n überhaupt den constanten Wert $n(n-2)$ hat, w.z.b.w. –

Der hiermit zuende geführte Beweis unseres Theorems unterscheidet sich von dem in Math. Ann. 10 gegebenen nur dadurch, daß ich damals mehr unmittelbar auf die empirischen Figuren Bezug nahm, jetzt aber auf die Übertragung der Schlüsse von den Figuren auf die algebraischen Idealcurven ausführlicher einging.

In einem Anhange handele ich

II Von der Verwirklichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Hauptgegenstand der Entwickelungen dieser Vorlesung war die Unterscheidung der beschränkten Genauigkeit der empirischen Raumanschauung von den idealisierten Auffassungen der Präzisionsgeometrie. Sobald man sich dieses Unterschiedes bewußt wird, kann man seinen Weg einseitig nach der einen oder anderen Seite wählen. Die eine Möglichkeit würde sein, daß wir unter Verzicht auf schärfere Begriffsbestimmungen eine Geometrie nur auf den Thatsachen der empirischen Raumanschauung aufzubauen unternehmen (wo man dann nie von Punkten oder Linien sprechen soll, sondern immer nur von Flecken [„Körnern" nach dem Vorschlage von Herrn Köpcke] und Streifen). Die andere Möglichkeit ist, daß wir die Raumanschauung als trügerisch überhaupt bei Seite lassen und nur mit abstrakten Beziehungen der reinen Analysis operieren. Beide Möglichkeiten scheinen gleich unsprechbar

zu sein; jedenfalls bin ich immer dafür eingetreten, daß wir die beiderlei Gebiete, nachdem man sich über ihre Verschiedenheit klar geworden, in Verbindung halten soll.

In dieser Verbindung scheint eine wunderbare anregende Kraft zu liegen. Deshalb bin ich immer dafür eingetreten, daß man sich abstrakte Beziehungen auch durch empirische Modelle klar machen solle. Dies ist der Gedanke, dem insbesondere unsere Modellsammlung ihren Ursprung verdankt. Ich möchte die letzten Stunden dieser Vorlesung benutzen, um Ihnen noch eine Reihe interessanter Modelle mit zugehörigen Erläuterungen vorzuführen.

Ich beginne gleich mit der Raumgeometrie und hier mit den Raumcurven.

In der Präzisionsgeometrie werden die Raumcurven als reguläre Flächencurven durch 3 Gleichungen:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ definiert, wo t sein Intervall durchläuft. φ, ψ, χ sind stetige Funktionen, zweimal differentiierbar und die drei Differentialquotienten noch abteilungsweise monoton.

Bei solchen Curven spricht man von einer „Tangente" und „Osculationsebene".

Man kennt, daß die Gleichung der Tangente gegeben ist als

$$\begin{vmatrix} (x-\varphi) & (y-\chi) & z-X \\ \varphi' & \chi' & X' \end{vmatrix} = 0 \;;$$

das Nullsetzen dieser „Matrix" bedeutet natürlich nichts anderes als das Gleichungssystem:

$$\frac{x-\varphi}{\varphi'} = \frac{y-\chi}{\chi'} = \frac{z-X}{X'} .$$

Die Gleichung der Osculationsebene lautet:

$$\begin{vmatrix} x-\varphi & y-\chi & z-X \\ \varphi' & \chi' & X' \\ \varphi'' & \chi'' & X'' \end{vmatrix} = 0 .$$

Hierzu hat man dann die Sätze:

Wenn man 2 Punkte einer Raumcurve durch eine Sekante verbindet und läßt die Punkte zusammenrücken, so geht die Sekante in die Tangente über.

Wenn man durch 3 Punkte einer Raumcurve eine Ebene legt und läßt diese Punkte irgendwie zusammenrücken, so geht die Ebene in die Osculationsebene über.

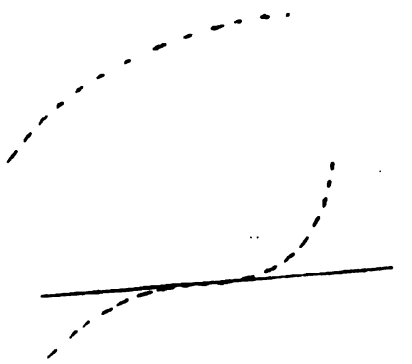
Die Frage wird nun sein, welche gestaltlichen Verhältnisse diesen Sätzen entsprechend am Modelle hervortreten.

Ich beginne damit Ihnen eine Anzahl Modelle von Raumcurven zu demonstrieren, wobei natürlich eine besondere Schwierigkeit darin besteht, daß Sie die Modelle aus der Entfernung nicht hinreichend genau erkennen können und ich mich daher auf eine blose Schilderung der Verhältnisse beschränken und sie auffor-

dern muss, die Dinge hinterher selber an dem Modell zu studieren.[1] Mein Vortrag als solcher muss dogmatische Form annehmen.

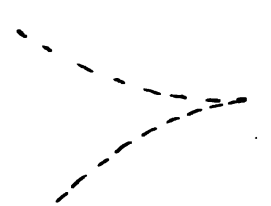
Zunächst hier ein Modell einer gewöhnlichen Raumcurve ohne singulären Punkt. Eine Hauptfrage wird sein: wie projiciert sich dieselbe von irgend einem Augenpunkt aus auf eine beliebig gestellte Projektionsebene?

Ist 1/ der Punkt beliebig, so erhält man eine singularitätenfreie ebene Curve;



ist 2/ der Punkt in der Osculationsebene gelegen, so erhält die ebene Curve einen Wendepunkt, entsprechend dem Umstande, dass die Raumcurve die Osculationsebene durchsetzt. (Dies liegt bereits unserm gewöhnlichen Erfahrungsbereich einigermaßen fern);

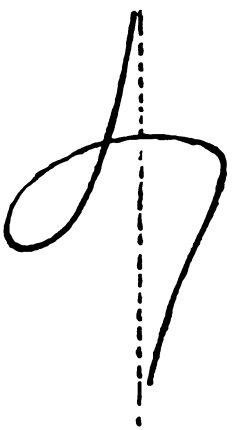
ist 3/ der Punkt auf der Tangente gelegen, so erhält die Projektion eine Spitze



[1] Es ist eine sehr wichtige Frage, ob man nicht die Demonstration complicierterer geometrischer Figuren vor einem größeren Publicum durch geeignete technische Hilfsmittel verbessern kann; wir werden im nächsten Semester Versuche mit einem Projektionsapparat machen.

Diese Angaben über das Verhalten der Raumcurven werden wesentlich vervollständigt werden können, wenn wir uns jetzt insbesondere auf die Raumcurven 3ter Ordnung beziehen, da diese als algebraische Curven gestatten, den Gesamtverlauf der jeweiligen Projektion in Betracht zu ziehen und nicht nur ein kleines Stück.

Sie hat z. B. nebenstehend gezeichnete Gestalt (einer Curve, die aus „einer Windung einer Art Schraubenlinie besteht). (Hierzu wurde im Vortrag ein Modell der Curve aus Messingdraht, sowie ein Modell der von den zugehörigen Tangenten gebildeten developpablen Fläche vorgezeigt).

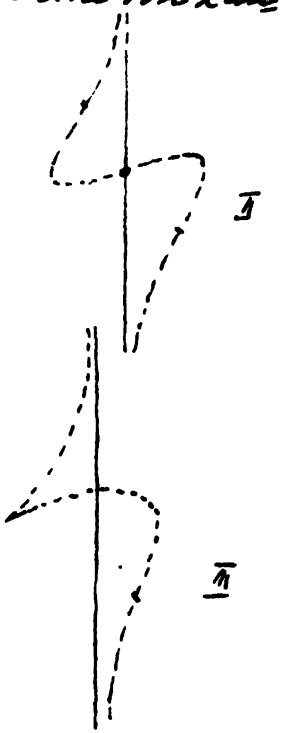


Als Projektion von einem beliebigen Punkt aus ergiebt sich zunächst eine ebene Curve 3ter Ordnung mit einem wirklichen Doppelpunkt und einem Wen[illegible]. Letzterer bedeutet [illegible]en Punkt auf der [illegible], der seine Oscula- [illegible]urch den Augenpunkt

hindurchschickt.

Diese Gestalt der Projektion ist aber nur eine von 2 anderen möglichen.

In der That wird bei einer anderen Lage des Augenpunktes der Doppelpunkt der Projektionsfigur ein isolierter Punkt und der eigentliche Curvenzug hat dann 3 reelle Wendepunkte d.h. es giebt dann auf der Raumcurve 3 solche Punkte, die ihre Osculationsebene durch den Augenpunkt senden. — Der Übergang von der Figur I zu II tritt ein, wenn der Augenpunkt auf einer Tangente der Raumcurve d.h. auf der Developpablen liegt. Die Curve bekommt dann eine Spitze und behält daneben noch eine Wendung (eine Spitze, wie es nach der allgemeinen Theorie cf. oben der Fall sein muß).



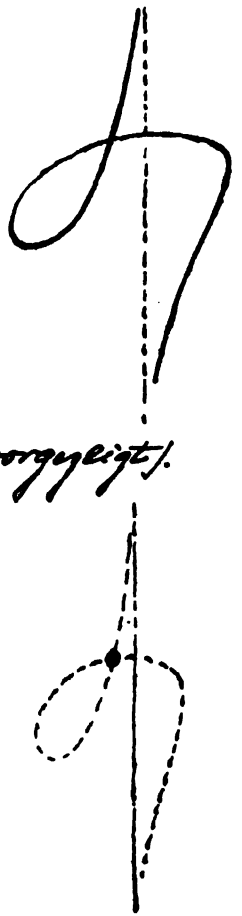
Soweit ist die Sache nicht schwer, weil sich die 3 gezeichneten Figuren ohne weiteres continuierlich aneinander anschließen. Schwieriger wird sie aber, wenn wir die neue Frage aufwerfen:

<u>Welche Gestalt hat die Projektionsfigur, wenn wir den Augenpunkt auf die Raumcurve selber fallen lassen?</u>

Aus der algebraischen Theorie ist dann klar, daß die Cur-

Diese Angaben über das Verhalten der Raumcurven wird wesentlich vervollständigt werden können, wenn wir uns jetzt insbesondere auf die Raumcurven 3ter Ordnung beziehen, da diese als algebraische Curven gestatten, den Gesamtverlauf der jeweiligen Projektion in Betracht zu ziehen und nicht nur ein kleines Stück.

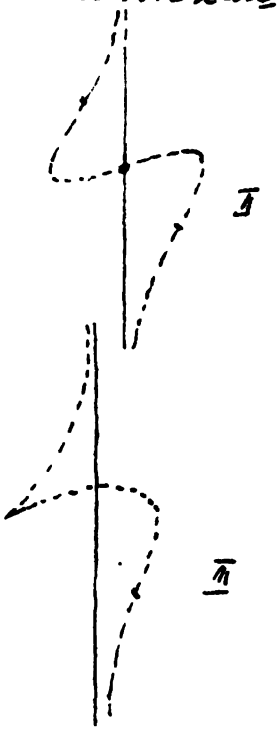
Sie hat z. B. nebenstehend gezeichnete Gestalt (einer Curve, die aus „einer Windung einer Art Schraubenlinie besteht). (Hierzu wurde im Vortrag ein Modell der Curve aus Hebing-draht, sowie ein Modell der von den zugehörigen Tangenten gebildeten developpablen Fläche vorgezeigt).



Als Projektion von einem beliebigen Punkt aus ergiebt sich zunächst eine ebene Curve 3ter Ordnung mit einem wirklichen Doppelpunkt und einem Wendepunkt. Letzterer bedeutet natürlich einen Punkt auf der Raumcurve, der seine Osculationsebene durch den Augenpunkt

hindurchschickt.

Diese Gestalt der Projektion ist aber nur eine von 2 anderen möglichen.



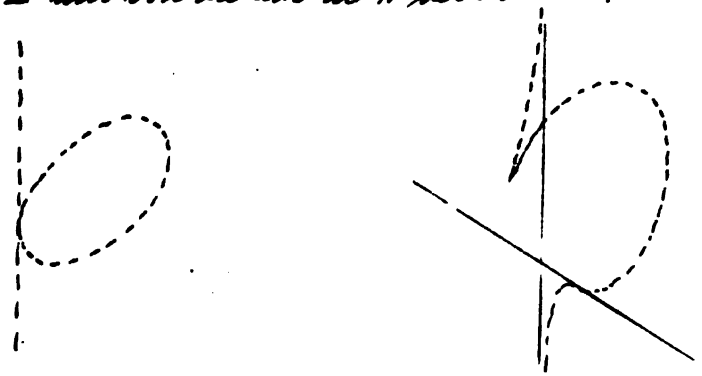
Für den Fall wird bei einer anderen Lage des Augenpunktes der Doppelpunkt der Projektionsfigur ein isolierter Punkt und der eigentliche Curvenzug hat dann 3 reelle Wendepunkte d.h. es giebt dann auf der Raumcurve 3 solche Punkte, die ihre Osculationsebene durch den Augenpunkt senden. — Der Übergang von der Figur I zu II tritt ein, wenn der Augenpunkt auf einer Tangente der Raumcurve d.h. auf der Developpablen liegt. Die Curve bekommt dann eine Spitze und behält daneben noch eine Windung (eine Spitze, wie es nach der allgemeinen Theorie cf. oben der Fall sein muß).

Soweit ist die Sache nicht schwer, weil sich die 3 gezeichneten Figuren ohne weiteres continuierlich aneinander anschließen. Schwieriger wird sie aber, wenn wir die neue Frage aufwerfen:

Welche Gestalt hat die Projektionsfigur, wenn wir den Augenpunkt auf die Raumcurve selber fallen lassen?

Aus der algebraischen Theorie ist dann klar, daß die Cur-

ve in einen Kegelschnitt und eine Gerade ausarten muss (der projicierende Kegel zerfällt in einen Kegel 2ter Ordnung und die zum Augenpunkt gehörige Osculationsebene). Wie geschieht aber diese Abtrennung der Geraden von der Curve aus der Continuität heraus? Ich sage, dass sich Fig III in Figur II' und von da aus in II verwandelt.



(NB zur Ausführung der Zeichnung: Natürlich darf die Spur der Osculationsebene in II' nicht die Spitze der Curve treffen, weil sonst die Curve mit einer Geraden 5 Punkte gemein hätte).

Dies sind bereits sehr merkwürdige Figuren. Noch merkwürdigere aber kommen hervor, wenn wir die zugehörige developpable Fläche betrachten d.h. die von den Tangenten der Raumcurve gebildete Fläche. Diese Developpable wird, wie Sie in allen Büchern finden, von den Osculationsebenen der Raumcurve umhüllt d.h. entlang den Tangenten der Raumcurve ist die jeweilige Osculationsebene Tangentenebene

der Developpabeln. Die Punkte der Raumcurve ergeben dabei eine Rückkehrkante der Fläche.

Es ist jedenfalls auf den ersten Blick wunderbar, daß eine Aufeinanderfolge von Tangenten eine solche Schneide einer Fläche bilden kann, wie Sie sie im Modell sehen.

Die Sache wird aber noch merkwürdiger, wenn wir nach den ebenen Schnitten der Developpabeln fragen.

Die Betrachtung der ebenen Schnitte der developpabeln Fläche ist allgemein zu reden das dualistische Gegenstück zu der Betrachtung des Kegels von dem Augenpunkte nach der Raumcurve, — so wird Jeder, der projektive Geometrie kennt, sofort die Antwort formulieren. In der That entsprechen sich (worauf ich hier nicht weiter eingehe) ganz allgemein dualistisch:

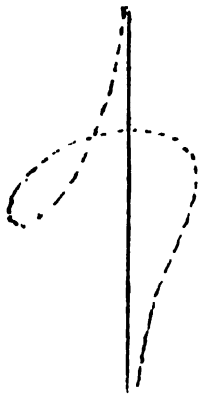
eine abwickelbare Fläche ~ eine Raumcurve
ein ebener Schnitt der Fläche ~ ein Projektionskegel der Curve
eine Erzeugende der Fläche ~ eine Tangente der Raumcurve.

Bei unserer Curve 3ter Ordnung gilt der Satz aber noch im speziellen Sinne, da das Tangentensystem einer Raumcurve 3ter Ordnung, wie wir im vorigen Winter sahen, sich in einem Nullsysteme selbst dualistisch entspricht. Das von den Punkten der Curve und ihren Osculationsebenen erzeugte Gebilde ist sich daher selbst dualistisch.

Fragen wir also nach den ebenen Schnitten der develop-

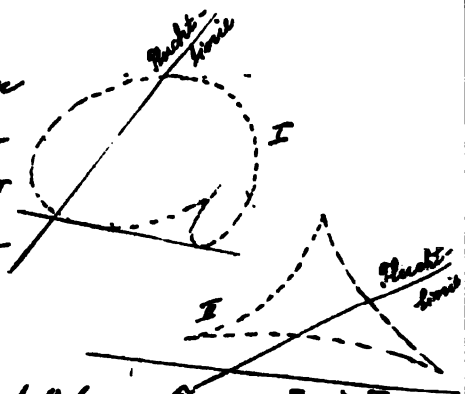
pallen Fläche, so haben wir nur die oben construierten Figuren I – IV zu dualisieren.

Die Figur I hat die Classe 4, da der vorkommende Doppelpunkt die Classe 6 der allgemeinen Curve 3ter Ordnung um 2 Einheiten reduciert. Die Ordnung ist natürlich 3, woraus wir ohne weiteres schliessen:



Jeder beliebige ebene Schnitt der Developpabeln ist eine Curve von der 4ten Ordnung und der 3ten Classe mit einer Doppeltangente (entsprechend dem einen Doppelpunkt der Projektionscurve).

Wir wissen, dass eine reelle Doppeltangente reelle und imaginäre Berührungspunkte haben kann. Wir erhalten also zweierlei Gestalten, entweder in I eine Doppeltangente mit allen Berührungspunkten, wo der Curvenzug dann eine Spitze hat, oder in II eine Doppeltangente mit imaginären Berührungspunkten, wo dann der reelle Curvenzug drei Spitzen trägt. Diese Figuren entsprechen den früheren Figuren I und II.

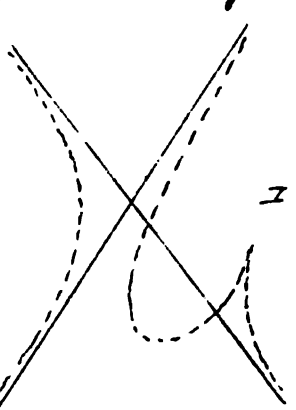


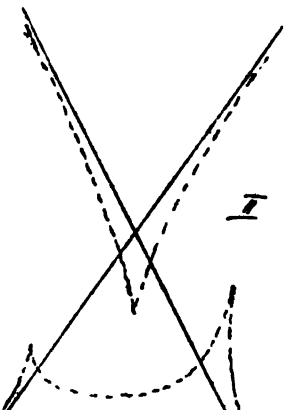
Wenn wir nun ausgerüstet mit diesen Kenntnis-

sen das Modell betrachten, so werden wir Schnitte der Developpablen von der gezeichneten Gestalt zunächst dort nicht finden. Wir müssen noch erst die Projektionen der gezeichneten Figuren studieren. Das ist ebenso wie bei den Kegelschnitten, die durch Projektion noch 3 verschiedene Gestalten (elliptische, hyperbolische, parabolische) erhalten können.

Wir legen also in unseren neuen Figuren I und II einen geradlinigen Schnitt durch die Curven und betrachten die schneidende Gerade als Richtlinie einer geeigneten Projektion, worauf wir 2 Curven mit je 2 Asymptoten erhalten, entlang denen die Äste ins Unendliche verlaufen.

Indem ich die Figuren nur qualitativ zeichne, kommen folgende beiden Gestalten heraus,



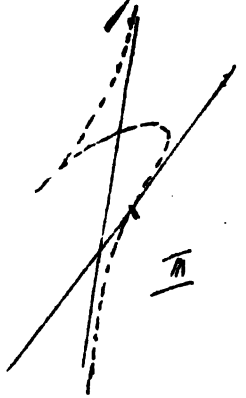


und diese so gezeichneten Figuren I und II stellen sich nun in Wirklichkeit nur, wenn wir das Modell unserer Developpablen durch geeignete Ebenen schneiden (dem Umstande mit

sprechend, dass sich das Modell mit 2 Mänteln in's Unendliche zieht).

Die weitere Frage ist nun aber: Wie gestaltet sich der Schnitt, wenn wir die schneidende Ebene durch eine Tangente der Raumcurve legen?

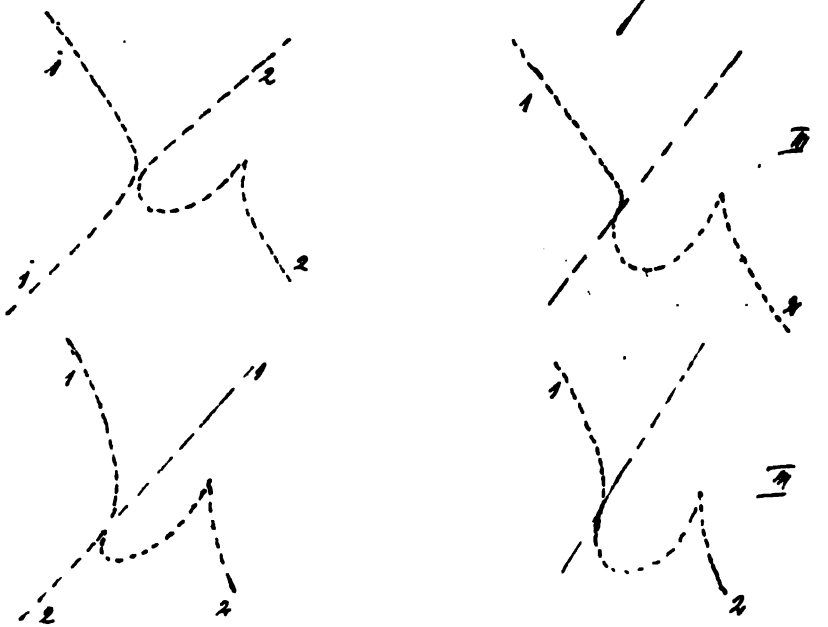
Es ist sofort klar, dass sich in diesem Falle die Erzeugende der Developpablen von der Curve 4ter Ordnung abtrennt und eine Curve 3ter Ordnung und 3ter Classe d.h. eine Curve mit einer Spitze überbleibt. Die nähere Überlegung zeigt, dass die selbe unsere Tangente in ihrem Berührungspunkte mit der Raumcurve osculiert.



Solche Sätze sind ja in abstracto leicht aufzustellen. Es fragt sich aber, wie der Übergang aus I und II zu unserer neuen Figur III continuierlich bewerkstelligt wird (entsprechend dem Übergange der Curve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt in eine solche mit Spitze). Ich sage so und bitte Sie, sich am Modell davon zu überzeugen:

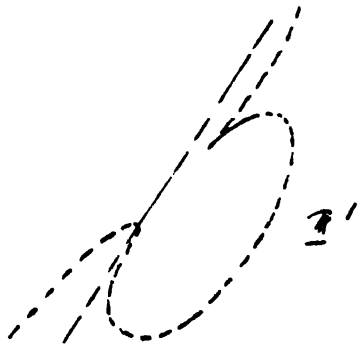
Wir erhalten die Figur III als Übergang aus den Figuren I und II, wenn wir bei I in der durch die nachstehende Zeichnung erläuterten Weise die beiden Hyperbeläste (1 und 2) zusammenrücken lassen und bei II (vgl. ebenfalls die

nachstehende Zeichnung) zwei der Spitzen, die nicht demselben Curvenstück angehören, einander nähern. Ebenso können wir rückwärts von II zu I und I gelangen, indem wir die Wendetangente von II und die zugehörige Curve in der einen oder anderen Weise verschmelzen.

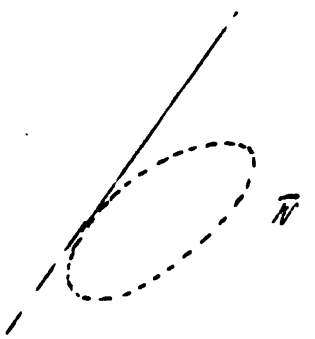


Zum Schluss betrachten wir noch den Schnitt unserer Fläche mit einer Osculationsebene. Wir erhalten einen Kegelschnitt mit einer doppelt zählenden Tangente (Fig IV). Diese Figur geht aus der Figur II hervor, indem wir die Knickenfigur III' einschalten. Diese erwächst offenbar dadurch aus III, dass man bei festgehaltener Wendetangente den unendlichen Ast 1 herabbiegt, während der Ast 2 mit

der Spitze nach oben gewendet sind. Läßt man Spitze und Doppelpunkt zusammenfallen, so entsteht die Figur IV.



III'



IV

Übrigens ist dies schließlich derselbe Übergang, den wir schon auf pg. 430 studiert haben.

Nachdem ich diese Behauptungen aufgestellt, bleibt für jeden einzelnen von Ihnen die Forderung bestehen, sie an den Modellen selber zu prüfen und dadurch seine Anschauung zu beleben.

An die so besprochenen projektiven Eigenschaften der Raumcurven, speziell der Raumcurven 3ter Ordnung, schließen sich nun selbstverständlich die Betrachtungen über Maßverhältnisse an. Ich begnüge mich, hier auf die Theorie der Krümmung, Torsion und Abwickelung der Curven hingewiesen zu haben. In Bezug auf letztere erwähne ich, daß man, jenachdem man eine Ebene auf einer Developpablen oder einen Faden auf einer Curve abrollt, die Schar

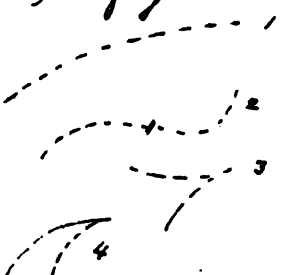
als Plan- resp. Filarevolvente bezeichnet. Als modernes Lehrbuch, in dem diese Dinge in besonders übersichtlicher Weise eingehend betrachtet werden, citiere ich:

G. Scheffers: Theorie der Curven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1900.

Weiter sage ich etwas über die singulären Punkte von Raumcurven.

In der Ebene können wir ein 4-teiliges Schema aufstellen, indem wir das Verhalten von Curvenpunkt und Curventangente in Bezug auf Weitergehen resp. Stillstehen und Rückkehren beim Fortschreiten entlang der Curve durch die Zeichen (+) und (−) charakterisieren. Dadurch erhalten wir neben dem gewöhnlichen Punkte die 3 gestaltlich zu unterscheidenden Arten singulärer Punkte, wie folgt:

ρ	ρ^t	
+	+	gewöhnlicher Punkt
+	−	Wendepunkt
−	+	gewöhnliche Spitze
−	−	Schnabelspitze.

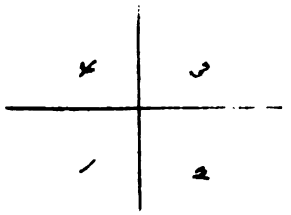


Das entsprechende Schema für 3 Dimensionen gab 1847 v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage". Man hat hier außer Curvenpunkt (p) und Tangente (tg) noch die Osculationsebene (e) in Betracht zu ziehen und hier alle 8 Combinationen der (+) resp. (−) Zeichen je zu dreien zu bilden.

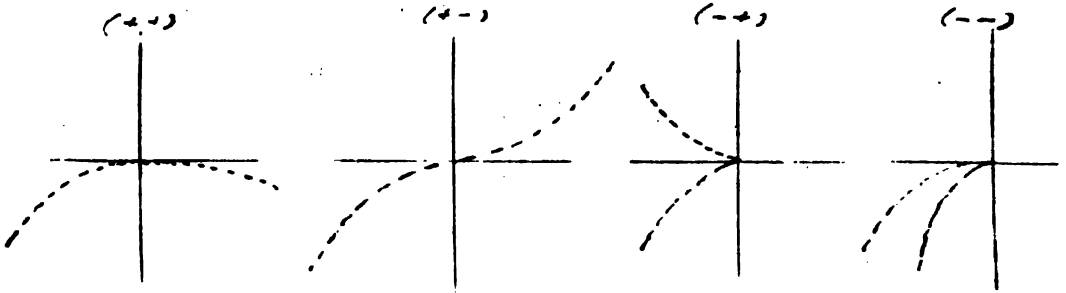
p	t	e	p	t	e	p	t	e	p	t	e
+	+	+	+	−	+	+	−	−	−	−	+
+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	−	−

Man hat also beim gestaltlich 7 Arten singulärer Vorkommnisse bei den Raumcurven zu unterscheiden. Man hat für dieselbe keine besonderen Namen geschaffen. Immerhin ist klar, wie sie zu charakterisieren sind. Die 8 verschiedenen Fälle werden durch die Modelle erläutert, die ich Ihnen hier vorzeige und die von Chr. Wiener konstruiert sind.

Um die Auffassung zu erleichtern, gehe ich für einen Augenblick auf die ebenen Curven zurück.



Indem wir den betrachteten Curvenpunkt als Anfangspunkt und die Tangente als x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems wählen, lassen sich die 4 oben für die ebene Curve unterschiedenen Fälle offenbar auch darnach auseinander halten, ob die Curve, die im ersten Quadranten herankommt,



im Quadranten I, II, IV oder I weitergeht. Man vergleiche obige Figuren.

Es liegt nun nahe, den Analogieschluss zu machen, dass sich die 8 Vorkommnisse bei den Raumcurven durch den Verlauf der Curvenfortsetzung in den 8 verschiedenen Oktanten des Coordinatensystems beschreiben lassen. Dies trifft in der That zu. Ich lege es etwas ausführlicher in folgenden Worten fest:

Man konstruire sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches die in Betracht kommende Tangente der Raumcurve als eine Axe, die zugehörige Osculationsebene als eine Ebene und den Berührungspunkt als Anfangspunkt besitzt. Kommt dann die Curve im Oktanten I heraus, so bleibt gerade eine 8-fache Möglichkeit, in welchem der 8 Oktanten sie ihre Fortsetzung finden soll, und diese 8 Gestalten decken sich mit denen, die wir oben nach v. Staudt aufzählten.

Wie dies im Einzelnen ist, muss an den Modellen studirt werden, da eine nur tabellarische Aufzählung wegen ihrer Gleichförmigkeit in der Auffassung nicht haftet. Gleichzeitig kommt an den Modellen die Frage nach den Projectionen der jeweiligen Raumcurve von einem wechselnden Augenpunkte aus zur Geltung, wovon wir im einfachsten Falle schon früher sprachen. Der Augen-

punkt wird dabei entweder 1/ beliebig oder 2/ auf der Osculationsebene, oder endlich 3/ auf der Tangente gewählt. Dabei ist es merkwürdig, dass in den Projektionen starke Singularitäten der Raumcurve für das Auge verschwinden können. Beispielsweise liefert im Falle (−++) die Projektion von der Tangente aus eine ebene Curve (++) ohne Singularität, resp. mit „maskierter" Singularität. Als weiteren merkwürdigen Satz erwähne ich, dass die Curve (−−−) eine Schnabelspitze giebt, von welcher Seite man sie auch projicieren mag.

Im Übrigen möchte ich hier die Anregung geben, dass die bezüglichen gestaltlichen Verhältnisse noch ausführlicher betrachtet werden. Insbesondere erwächst die Aufgabe, systematisch die Gestalt der Developpablen, die sich in den 8 Fällen an die Raumcurve anschmiegt, zu betrachten und insbesondere zuzusehen, was für ebene Schnitte bei derselben herauskommen und wie sie der Continuität nach zusammenhängen.

Von analytischer Seite existiert eine Litteratur der hier besprochenen Vorkommnisse, die ich kurz angeben will. Dabei ist die Annahme der Autoren, dass sich x, y, z in Potenzreihen, fortschreitend nach ganzen Potenzen von t, entwickeln lassen. Es handelt sich um folgende Aufsätze:

Rohn, Über Singularitäten von Raumcurven, Diss. Leipzig 1885, auch American Journal of math 8,
Stande, Über den Sinn der Windung in singulären Punkten von Raumcurven, ebenda Bd 17 (1895),
Meder, Über eine Art von singulären Punkten von Raumcurven, J. f. Math 116 (1895);
an diese Aufsätze müsste eine gestaltliche Discussion der von mir gewünschten Art anknüpfen.

Damit schliesse ich ab, was ich über Raumcurven sagen wollte und wende mich zu den Flächen.

Denken wir dabei an die Unterscheidungen, die wir bereits bei den ebenen Curven hatten (analytische, nicht analytische, reguläre u.s.w.), so ist klar, dass diese hier in noch grösserer Zahl auftreten und dass es etwas ganz Particuläres ist, wenn ich mich in meinen Bemerkungen auf algebraische Flächen beschränke, wie jetzt der Kürze halber geschehen soll.

Eine algebraische Fläche wird durch eine Gleichung definiert:

$$0 = f(x, y, z), \text{ wo } f \text{ ein Polynom ist.}$$

Man pflegt die Terme in f so zu ordnen, dass man je die Glieder derselben Ordnung in x, y, z zusammen nimmt:

$$0 = f_0 + f_1 + f_2 + \dots\dots$$

Untersucht man die Fläche in der Nähe eines Punktes, so wählt man diesen zweckmäßigerweise als Coordinatenanfangspunkt und es fällt dann das constante Glied fort. Man sieht sodann die Fläche, allgemein zu reden, als in erster Annäherung durch $0 = f_1$, d.h. durch die Tangentialebene in 0, gegeben an. Man kann diese Gleichung geradezu als Definition der Tangentialebene ansehen und sagen:

Die Tangentialebene wird definiert, indem man die Glieder erster Ordnung für sich gleich Null setzt.

Will man eine größere Annäherung, so setzt man

$$0 = f_1 + f_2$$

und bezeichnet diese Fläche als Schmiegungsfläche 2ter Ordnung u.s.w.

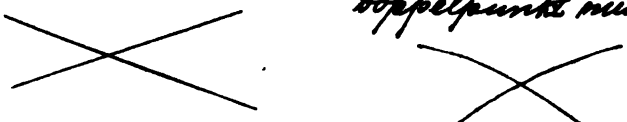
Bei diesem Ansatze ergiebt sich nun gleich eine Einteilung der Punkte der Fläche: Ist f_1 nicht identisch Null d.h. hat man eine bestimmte Tangentialebene, so spricht man von einem „einfachen" Punkt der Fläche; ist aber $f_1 = 0$ und $f_2 \neq 0$, so hat man einen Doppelpunkt u.s.w.

Was ist nun über die einfachen Punkte zu bemerken?

In erster Linie fragen wir, in welcher Curve die Fläche von der Tangentialebene in einem solchen Punkte geschnitt

ten wird. Man geht dabei davon aus, daß die betreffende Curve in erster Annäherung durch das gleichzeitige Verschwinden der beiden Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ gegeben sei; man vergleicht also die Curve mit dem Schnitt der Tangentialebene und der Schmiegungfläche 2. Grades. Letzterer besteht offenbar aus 2 geraden Linien, die reell oder imaginär sein oder zusammenfallen können, und indem man diese Unterscheidung auf die Gestalt der Schnittcurve von Fläche und Tangentialebene überträgt, hat man folgende Categorieen.

Die Geraden sind reell ~ die Schnittcurve hat einen Doppelpunkt mit reellen Ästen



Die Geraden sind imag~ die Schnittcurve hat einen Doppelpunkt mit imaginären Ästen

Die Geraden fallen zusam~ die Schnittcurve hat eine Spitze.

Ich recapituliere:

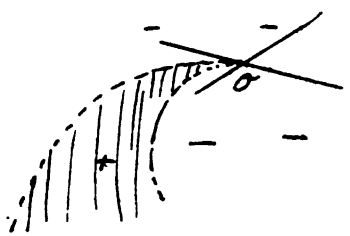
Abgesehen von höheren Vorkommnissen, wo $f_2 \equiv 0$,

schneidet die Tangentialebene die Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt, dessen Äste reell oder imaginär sind oder auch zusammenfallen. Man spricht demgemäß von „hyperbolischer", „elliptischer" und „parabolischer" Flächenkrümmung.

Es ist übrigens leicht sich hier verschiedene schöne Beispiele zu denken, wo (bei der in Rede stehenden Schnittcurve von Fläche und Tangentialebene) höhere Singularitäten auftreten, insbesondere zu untersuchen, wann eine Schnabelspitze als Schnitt auftritt u. dergl. Ist insbesondere $f_2 \equiv 0$, so hat der Schnitt der Tangentialebene mit der Fläche einen 3-fachen oder noch höheren Punkt. Hieran schließt sich folgende Bemerkung:

Bekanntlich untersucht man in den elementaren Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung auch die Maxima und Minima von Funktionen zweier Veränderlicher. Es kommt dies auf die Untersuchung des Schnittes hinaus, welchen eine Fläche $z = f(xy)$ mit einer horizontalen Tangentialebene gemein hat.

Nehmen wir nun etwa an, daß der Schnitt eine Schnabelspitze sei, und zwar daß sich im schraffierten Bereich die Fläche nach oben erhebt, im frei-



gelassenen Gebiet also nach unten herabsenkt, so ist zunächst klar, dass dann im Berührungspunkte O weder ein Maximum noch Minimum der durch die Fläche vorgestellten Funktion $z = f(x,y)$ vorliegt.

Betrachten wir aber eine Gerade durch O, so zeigt sich, dass für jedes Azimut, unter dem wir geradlinig von O ausgehen, ein echtes Maximum vorliegt, indem das z längs der Geraden von O aus beginnend zunächst stets sinkt. Es ist uns unmöglich, von O aus auf geradlinigem Wege unmittelbar in das schraffierte Gebiet hineinzugelangen. Demnach genügt es zur Beurteilung der Frage, ob ein Maximum oder Minimum einer Funktion von 2 Variablen vorliegt, nicht, die betreffende Untersuchung für geradliniges Fortschreiten von O aus unter beliebigem Azimute anzustellen. Man muss auf einer Parabel vorwärts gehen, um in das schraffierte Gebiet direkt hineinzugelangen.

Bei rein analytischem Ansatze aber erscheint die Sache schwerverständlich. Und in der That haben hierüber in allen Lehrbüchern falsche Behauptungen gestanden, bis vor ca. 20 Jahren zum ersten Male Peano auf den richtigen Sachverhalt aufmerksam machte! (Übrigens hat auch Weierstrass in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung immer die richtige Theorie zum

Vortrag gebracht).

Natürlich können wir nun weiter bei den Flächen auch die metrischen Verhältnisse in Betracht ziehen. Es greift hier für Punkte, in denen $f_1 \neq 0$ und $f_2 \neq 0$, besonders die von L. Euler entwickelte allgemeine Krümmungstheorie Platz:

Man konstruiert sich in dem betreffenden Punkte die Normale, legt durch sie ebene Schnitte und konstruiert in ihnen die Krümmungskreise. Dann gibt es 2 aufeinander senkrechte Normalschnitte, wo die Krümmung ein Maximum resp. Minimum ist. Ich trage dies nicht besonders vor, erwähne aber, dass zur Erläuterung der gewöhnlichen Krümmungsellipse in einfachen Flächenpunkten von Chr. Wiener wieder Modelle construiert sind, welche die Krümmungskreise in den einzelnen Normalschnitten wiedergeben. (Die Modelle wurden vorgelegt).

Schliesslich mache ich noch auf die im Brill'schen Catalogs als bohnenförmige Krummflächen' bezeichneten Modelle aufmerksam, auf denen man die einzelnen Punkte hyperbolischer, elliptischer oder parabolischer Krümmung markieren soll. Es zeigt sich, dass unser Augenmass da sehr unsicher ist, sodass die Definitionen der elementaren Krümmungstheorie be-

reits einen sehr abstrakten Charakter zu besitzen scheinen. Man empfindet dies besonders lebhaft, wenn man die betreffende Aufgabe an einer so komplicierten, empirisch vorgelegten Fläche, wie etwa eine Portraitbüste vorstellt, durchzuführen sucht. Ich empfehle dies zu studieren.

Nunmehr gehe ich zu einer Besprechung der singulären Punkte von Flächen, speziell der Flächen 3ter Ordnung über. Nach unserer obigen Bemerkung läßt sich die Gleichung einer F_3 mit Doppelpunkt im Coordinatenanfangspunkt in der Form:

$$0 = f_2 + f_3$$

schreiben. Wir nehmen dabei an, daß $f_2 \neq 0$, sodaß wir einen wirklichen Doppelpunkt der Fläche (und nicht etwa einen dreifachen Punkt) vor uns haben.

Man sagt dann gewöhnlich, daß der Kegel 2ten Grades $f_2 = 0$ in erster Annäherung" den Verlauf der Fläche in dem Punkte 0 wiedergiebt und je nachdem dieser Kegel

a/ ein eigentlicher Kegel ist { reell oder imaginär }, oder

b/ ein in 2 Ebenen zerfallender Kegel { die Ebenen können reell oder imaginär sein }, oder endlich

c/ ein in eine Doppelebene ausgearteter Kegel,

unterscheidet man

a/ einen gewöhnlichen bezw. isolierten Doppelpunkt,

b/ einen biplanaren Punkt,

c/ einen uniplanaren Punkt der Fläche.

Die Frage, die sich hier infolge des allgemeinen Princips: stets die geometrische Anschauung in ihr Recht treten zu lassen, sofort erhebt, ist:

Wie sieht eine Fläche 3ter Ordnung aus, die einen Doppelpunkt der einen oder anderen Art besitzt?

Zuvor bemerke ich:

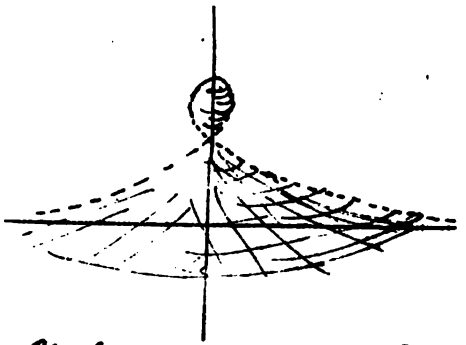
Wenn wir die Fläche $f_2 + f_3 = 0$ mit $f_2 = 0$ schneiden, so bleibt $f_3 = 0$ (ein Kegel 3ter Ordnung). Beide Kegel haben nach dem Bézout'schen Theorem $2 \times 3 = 6$ Erzeugende gemein.

Durch einen Doppelpunkt einer Fläche 3ter Ordnung gehen also 6 gerade Linien der Fläche (wobei natürlich zu bedenken ist, dass diese geraden Linien reell oder imaginär sein, oder auch zusammenfallen können).

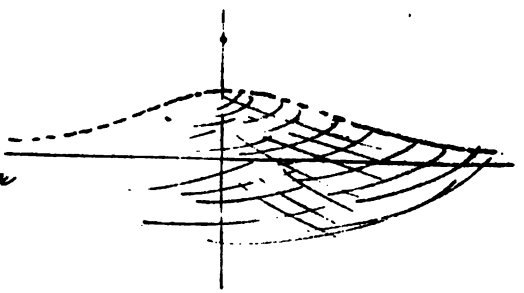
Ich gebe nun Beispiele von F_3, bei denen die verschiedenen Arten von Doppelpunkten auftreten, führe aber nicht den Beweis dafür, dass die Dinge allgemein ähnlich liegen.

Um eine Fläche mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt zu erhalten, beschränken wir uns auf Rotationsflächen

und zeichnen in einem Meridianschnitt (xy-Ebene) eine gegen die z-Axe symmetrische Curve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt, die die x-Axe zur sog. Wendeasymptote hat (vergl die Figur). Darnach ist das Bild der Fläche ganz klar. Die 6 Geraden durch den Doppelpunkt fallen hier offenbar imaginär aus.



Ähnlich konstruieren wir eine Fläche mit isoliertem Doppelpunkt. Man hat nur eine Curve 3ter Ordnung mit isoliertem Doppelpunkt als Meridianschnitt zu zeichnen.



Des Weiteren spreche ich von einer Fläche, bei der die 6 Geraden, die durch einen einzelnen Doppelpunkt laufen, reell sind. Ich wähle nämlich eine Fläche mit 4 gewöhnlichen Doppelpunkten, die, um die Fläche leicht analytisch darstellen zu können, in den Ecken des Coordinatentetraeders angenommen sein mögen. (Wir gebrauchen hier also vorübergehend Tetraederkoordinaten, wie es ausführlich im vorigen Wintersemester erläutert wurde). Die Gleichung ist dann, nachdem wir die bei der De-

finition der Tetraederkoordinaten noch zur Verfügung stehenden multiplicierenden Constanten richtig gewählt haben,:

$$0 = \sum_i \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}.$$

Multipliziert man mit den Nennern herauf, so haben wir die Gleichung 3ten Grades in x_1, x_2, x_3, x_4:

$$0 = x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3.$$

Gehen wir schließlich von den Tetraederkoordinaten (durch eine projektive Umgestaltung der Fläche) zu gewöhnlichen Coordinaten über entsprechend den Formeln:

$$x_4 = x, \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = 1,$$

so heißt die Gleichung

$$0 = yz + xz + xy + xyz$$

(Ein Doppelpunkt liegt hier in O, die 3 anderen unendlich fern).

Zu der so geschriebenen Gleichung haben wir die beiden zum Coordinatenanfangspunkt gehörigen Kegel $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ unmittelbar vor uns. Der Kegel $f_2 = 0$, der die Fläche in der Nähe von O in erster Annäherung darstellt,

$$0 = yz + xz + xy$$

enthält offenbar die 3 Coordinatenaxen. Nehmen wir

$$f_3 = 0 = xyz$$

hinzu, so besteht dieser Kegel aus den 3 durch O gehen-

den Coordinatenebenen, er enthält also die Coordinaten-axen doppelt, so dass wir den Satz erhalten:

Die 6 Erzeugenden, die bei unserer Fläche durch den Knotenpunkt gehen, fallen paarweise in die 3 Coordinatenaxen zusammen.

Sie werden ferner sehr leicht selbst beweisen:

Entlang diesen Erzeugenden fällt die Tangentialebene der Fläche mit derjenigen des Kegels $yz + zx + xy = 0$ zusammen, hat also constante Richtung.

Diese Sätze gelten wegen ihres projektiven Charakters auch für die F_3 mit 4 im Endlichen gelegenen Knoten. Hiervon möge man sich am Modell überzeugen, das ich vorzeige. Das Modell zeigt zunächst als Gerade, die nach ihrer ganzen Erstreckung auf der Fläche liegen, die 6 Kanten des Doppelpunkttetraeders, längs denen die Tangentialebenen jeweils constant verlaufen, davon abgetrennt aber noch als Schnitt der Fläche mit einer bestimmten horizontal verlaufenden Ebenen 3 weitere Gerade, längs denen sich die Tangentialebene dreht.

Nunmehr gehe ich zu den biplanaren Punkten der F_3 über.

Hier ist die Auffassung schon nicht mehr so einfach, man hat von den gestaltlichen Verhältnissen eines biplanaren Punktes keine unmittelbare Vorstellung mehr, sou-

dern muß sich die Sache in concreto überlegen.

Zu unserer Gleichung

$$0 = f_2 + f_3$$

sei f_2 das Produkt zweier unterschiedener Linearfaktoren; indem wir $f_2 = 0$ setzen, erhalten wir zwei getrennte Ebenen. Zunächst nehmen wir die beiden Ebenen conjugiert imaginär an, setzen also etwa

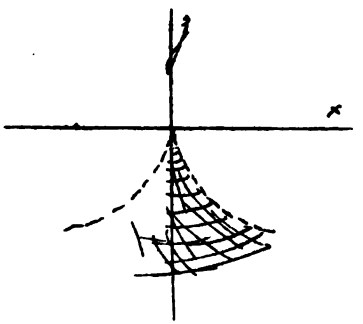
$f_2 = (x+iy)(x-iy)$, sodaß die z-Axe der reelle Schnitt der beiden Ebenen ist. Die Fläche selbst möge dann weiter die einfache Gleichung

$$0 = x^2 + y^2 + z^3$$ haben.

<u>Wie sieht der hier auftretende biplanare Punkt aus?</u>

Wenn wir sagen, er werde in erster Annäherung durch die beiden durch ihn gehenden, conjugiert-imaginären Ebenen vorgestellt, so ist das bei geeigneter Interpretation nicht falsch, aber nicht ohne weiteres verständlich. Ich sage vielmehr so:

Unsere Fläche ist eine Rotationsfläche. Wir zeichnen zunächst den Meridianschnitt mit der xy-Ebene:



$$0 = x^2 + z^3.$$

Dies ist eine Curve 3ter Ordnung mit Spitze in O, vergl. die Figur. Die Fläche selbst erhalten wir durch

Rotation um die z-Axe.[1] Ich spreche das Resultat gleich in allgemeiner Form aus:

Hat ein biplanarer Punkt imaginäre Ebenen, dann hat die Fläche dort die Gestalt eines zugespitzten Dorns.

Schwerer aufzufassen ist der Fall eines biplanaren Punktes mit reellen Ebenen.

Als Beispiel nehme ich

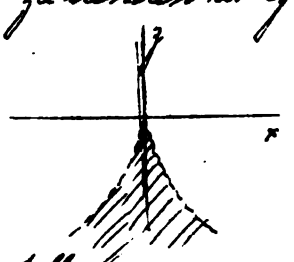
$0 = x^2 - y^2 + z^3$, wo die Ebenen des biplanaren Punktes durch

$x+y=0$, $x-y=0$ gegeben sind d.h. durch 2 aufeinander senkrechte Ebenen durch die z-Axe, unter 45° gegen das Coordinatensystem xy orientiert.

Schneide ich die Fläche mit einer der Ebenen, so bleibt

$f_3 = 0$ d.h. $z^3 = 0$. Also:

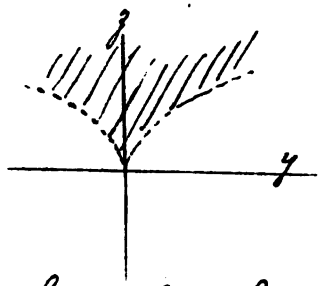
Jede der beiden Ebenen schneidet die Fläche in 3 gerade Linien. Ist speziell $f_3 = z^3$, wie wir der Einfachheit halber voraussetzten, so schneidet jede der Ebenen bei vertical gestellter Axe des biplanaren Punktes die Fläche in einer 3 fach zählenden horizontalen Geraden.



Die Schnitte mit den Meridianebenen durch die z-Axe werden nun sehr merkwürdig

[1] Die Fläche bildet also einen Übergangsfall zwischen den beiden Frgg. auf pg 449.

Schneiden wir mit der Ebene $y=0$, so wird $0 = x^2 + y^3$, d.h. wir haben unsere obige Curve mit nach oben gerichteter Spitze. Als Schnitt mit der Ebene $x=0$ folgt $0 = -y^2 + y^3$, d.h. eine eben solche Curve mit nach unten gerichteter Spitze. Während man also die Ebene $y=0$ in die Ebene $x=0$ dreht, kehrt die Spitze ihren Sinn um, der Übergang tritt in den Ebenen



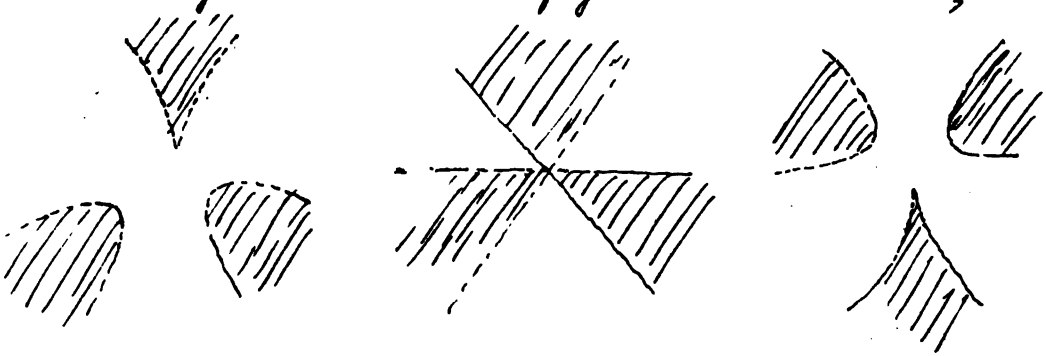
$y+x=0$ und $y-x=0$ ein, deren Schnitt wir bereits studierten. Es besteht also ein Satz, den ich gleich allgemein in folgender Form ausspreche:

Die Meridianebenen, die sich durch die verticalgestellte Axe des biplanaren Punktes legen lassen, schneiden im allgemeinen in einer Curve mit Spitze, sodass die z-Axe Spitzentangente ist. Im Besonderen aber, wenn die Meridianebenen Tangentialebenen des biplanaren Punktes sind, dann schneiden sie in 3 geraden Linien.

Das Büschel der Meridianebenen wird so durch die beiden Ebenen des biplanaren Punktes in 2 Halbbüschel zerlegt. Die Sache ist natürlich so, dass die Schnittcurven der Meridianebenen des einen Büschels die Spitze nach oben, die Schnittcurven der Meridiancurven des an-

deren Büschels die Spitze nach unten kehren.

Es entsteht nun wieder die Aufgabe, dies sich anschaulich vorzustellen. Das Modell, welches ich vorzeige, versinnlicht den allgemeinen Fall des biplanaren Punktes, wo in den beiden Tangentialebenen 3 reelle gerade Linien liegen. Hier die Reihenfolge der Schnittcurven,



aus denen man sich die Gestalt der Fläche zusammensetzen mag.

Ebenso wie die hiermit besprochene Gestalt des biplanaren Punktes ohne nähere Überlegung nicht leicht vorstellbar ist, so ist es auch im Falle des uniplanaren Punktes.[1]

Wir haben hier, als erste Annäherung, eine Doppelebene, dargestellt durch die Glieder 2t Ordnung, sagen wir

---

[1] Diese gestaltlichen Angaben über biplanare und uniplanare Punkte wurden wohl zuerst von Kummer und Schläfli gemacht. Später habe ich sie in meiner Theorie der Gestalten der Flächen 3t. Ordnung benutzt (Math Ann. 6 (1873)).

einfach $z^2 = 0$. Dann lautet die Gleichung der Fläche

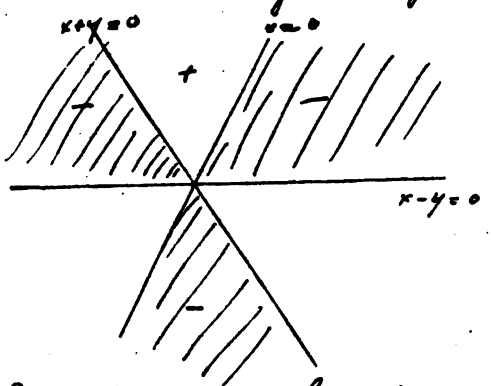
$$0 = z^2 + f_3 \, ;$$

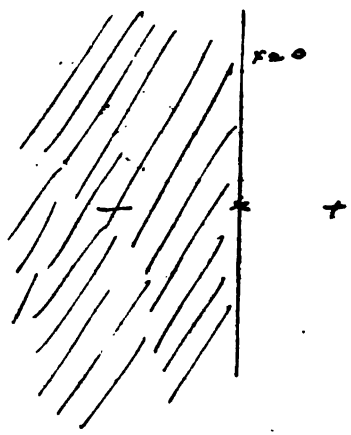
f_3 wählen wir der Einfachheit halber so, daß nur x, y in ihm vorkommt, und haben 2 Fälle, deren Bedeutung sofort klar sein wird. Wir setzen das eine Mal

$$f_3 = x(x^2 - y^2), \text{ das andere Mal}$$

$$f_3 = x(x^2 + y^2) \quad \text{d.h.:}$$

$f_3 = 0$, $f_2 = 0$ gibt entweder 3 reelle Gerade oder eine reelle oder 2 imaginäre Gerade:





Der allgemeine Satz ist:

<u>Die Ebene des uniplanaren Punktes schneidet in 3 Geraden durch O, von denen entweder eine oder alle 3 reell sind.</u>

Für z selbst folgt aus der Gleichung

$$z = \pm \sqrt{-x(x^2 + y^2)}$$

$$z = \pm \sqrt{-x(x^2 - y^2)}, \text{ oder:}$$

Das z sind da reell, wo f_3 negativ ist, und zwar

existieren für diese Gebiete je 2 reelle Werte von z. Also überdeckt die Fläche 3ter Ordnung von oben gesehen die jenigen Partieen der xy-Ebene doppelt, die im Bilde schraffiert sind, die anderen gar nicht.

Ich erläutere dies noch ein wenig:

Sind die 3 Ergungenden in der uniplanaren Ebene reell, so zieht sich die F_3 von 3 Seiten her in der Weise in den uniplanaren Punkt hinein, daß sie von oben gesehen 3 Sektoren der xy-Ebene doppelt zu überdecken scheint, andernfalls von einer Seite her. Jeder ebene Schnitt durch O, der nicht gerade in die xy-Ebene fällt, hat in O eine Spitze.

Ich bemerke noch, daß dies der allgemeinste Typus eines uniplanaren Punktes ist, wie ich nicht weiter ausführe. Als Beispiele mögen einige noch von Kummer modellierte Flächen 4ter Ordnung dienen, in denen mehrere solcher uniplanaren Punkte vorhanden sind.

Zusammenfassend mögen wir sagen:

Die eigentliche Gestalt der biplanaren und uniplanaren Punkte der algebraischen Flächen wird uns erst klar, wenn wir nicht nur die Glieder 2ter Ordnung, sondern auch die Glieder 3ter Ordnung in Betracht ziehen.

Mit unsern letzten Überlegungen würden wir so nahe an die Gestalten der Flächen 3ter Ordnung herange-

führt, dass ich zum Schluss dieselben allgemein noch näher vorführen will.

Wenn ich zunächst zur der Theorie der F_3 einige historische Angaben machen soll, so erwähne ich, dass

1849 Cayley und Salmon nachwiesen, dass auf der F_3 27 Gerade existieren.

Seitdem ist deren Gruppierung vielfach studiert worden, besonders discutierte

1863 Schlaefli im Einzelnen, wann diese reell oder imaginär sein mögen, und betrachtete auch die Singularitäten, die bei einer F_3 auftreten können.

1870 fallen meine eigenen Untersuchungen über die gestaltlichen Verhältnisse der F_3 in Math. Ann. 6.

Daran anschliessend gab dann

1879 Rodenberg in Math. Ann 14 eine analytische Bestätigung meiner durch geometrische Continuitätsbetrachtungen gefundenen Resultate. Andererseits hat aber auch Rodenberg im Verlage von Brill im genauen Anschluss an meine Untersuchungen eine Reihe von Modellen der F_3 erscheinen lassen, von denen ich eine Auswahl hier vorführe.

Wenn ich nun gleich mit den Gestalten der F_3 beginnen soll, so ist das oberste Princip, dass wir die uns von pg 450 schon bekannte Figur mit 4 reellen Dop-

pelpunkten zum Ausgangspunkt wählen und von hier aus durch continuierlichen Übergang (Auflösung der Doppelpunkte) allgemeinere Flächen bilden. (Vergl. das analoge Vorgehen bei den ebenen Curven nter Ordnung, wo wir von einer Curve mit zahlreichen Doppelpunkten[1] durch Auflösung derselben zu Nachbarcurven fortschritten).

Oben wiesen wir nun auf der Fläche, die uns jetzt als Ausgangsfläche dienen soll, bereits die 24 Geraden nach, indem nämlich zu den 6 Kanten des Tetraeders, deren jede 4 mal zählte, noch 3 einzeln verlaufende horizontale Gerade getraten.

Neben wir diese Flächengestalt hier zugrunde legen, so ist selbstverständlich, dass wir alle collinearen Umformungen derselben Fläche als gleichberechtigt ansehen, anderenfalls würde die Kanonigfaltigkeit der F_3 – in deren Gleichung 19 Constante auftreten –, gar nicht zu übersehen sein! Es ist dies derselbe Standpunkt, als wenn wir in der Ebene Ellipse, Parabel und Hyperbel nicht weiter unterscheiden.

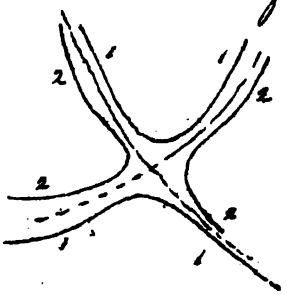
So ist es theoretisch. Praktisch dürfen wir diesen, gewissermaßen vornehmen, Standpunkt erst einnehmen, wenn wir im Auffassen collinearer Umformungen geübt sind. Wir müssen also zunächst die verschiedenen Formen kennen lernen, die durch Collineation aus

[1] nämlich einer Curve, die in lauter Curven niederen Ordnung zerfallen war.

dem Ausgangsmodell entstehen, etwa so, daß wir das selbe mit verschiedenen Ebenen schneiden und diese dann der Reihe nach als Fluchtebenen ins Unendliche projicieren und die entstehenden Flächenformen studieren, sowie auch modellieren, um hinterher in allen nur die gemeinsamen Eigenschaften zu sehen und die Unterschiede als gleichgültig unberücksichtigt zu lassen. (Man darf die Detailkenntniß erst verachten, wenn man sie besitzt, nicht vorher). Als Resultat ergiebt sich:

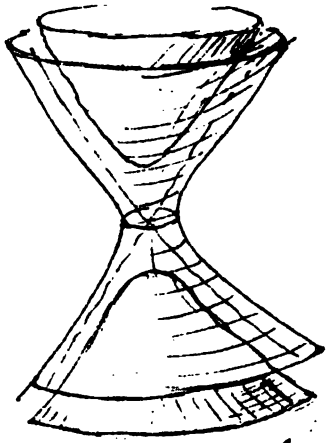
So gut man Ellipse und Hyperbel (die Parabel sei als Übergangsfall hier bei Seite gelassen) unterscheidet, je nach der Beziehung des Kegelschnitts zur unendlich fernen Geraden, so kann man den F_3 mit 4 reellen Doppelpunkten 5 Arten nach ihrer Beziehung zur unendlich fernen Ebene unterscheiden. Diese 5 Arten sind sämtlich modelliert und ich zeige Ihnen hier die Modelle vor. Wir werden diese 5 Arten weiterhin nicht mehr ausdrücklich unterscheiden.

Von diesen Flächen gehen wir nun durch Auflösung der Doppelpunkte zu den Nachbarflächen über.



Dabei knüpfe ich an die Figur in der Ebene an. Deutlich können wir eine Curve mit Doppel

punkt in 2 verschiedene Curven ohne Doppelpunkt (1 und 2 in der Figur) auflösen. Diese beiden Wesen sind an sich gleichwertig. Gehen wir nun aber zum Raume über dadurch, daß wir diese Curven um die gezeichnete verticale Linie rotieren lassen, so erhalten wir für die entstehenden Flächen einen charakteristischen Unterschied. Die eine (1) hat den Typus eines 2-schaligen Hyperboloids (besteht aus 2 getrennten Flächenteilen), die andere (2) hat den Typus eines einschaligen Hyperboloids (i.e. einer Fläche, welche an der Stelle des früheren Doppelpunktes eine Einschnürung aufweist).



Indem ich die beiden Prozesse, die bei der Entstehung der Fläche aus derjenigen mit dem Doppelpunkte zur Geltung kommen, bezeichnungsweise als Abtrennung (der an den Doppelpunkt heranreichenden Flächenteile) mit dem symbolischen Zeichen (–), und Verschmelzung (dieser Flächenteile) mit (+) bezeichne, haben wir den Satz:

Ein Doppelpunkt einer Fläche kann beim Übergang zur Nachbarfläche 2 Prozessen unterworfen werden, dem

Process der Abtrennung und denjenigen der Verschmelzung.

Gehen wir nun von unserer Ausgangsfläche in der Nähe zu der Nachbarfläche über, dass wir sämtliche Doppelpunkte den beiden Prozessen unterwerfen, so haben wir zusammenfassend 5 Möglichkeiten, die durch das Schema

+ + + + + + − −
+ + + − + − − − − − − −

angedeutet sind.

Überlegen wir uns, wie diese Flächen aussehen, so zeigt sich, dass wir durch unsere 5 Möglichkeiten für die singularitätenfreien Flächen 4 einteilige und 1 zweiteilige Fläche (− − − −) bekommen. Bei letzterer wird in der That durch Abtrennung aller Knoten ein ovalartiger Teil frei von einem gewellten Teile der Fläche umgeben sein; die übrigen Flächen bestehen alle je aus einem Stück.

Es zeigt sich nun, dass diese 5 Fälle genau den Arten entsprechen, die Schlaefli nach der Realität des Gebildes unterschieden hat.

Das Gesetz ist folgendes:

Eine auf der Ausgangsfläche verlaufende Tetraederkante verwandelt sich bei der abgeleiteten Fläche in ein

ter imaginäre gerade Linien, sobald auch nur einer der Doppelpunkte, den sie mit einem anderen verband, dem Prozeß der Abtrennung unterworfen wird.

Umgekehrt aber:

Eine Tetraederkante, die zwei Doppelpunkte verbindet, die beide dem Prozeß der Resolvierung unterworfen werden, spaltet sich beim Übergang zur Nachbarfläche in 4 reelle Gerade.

Nach dieser Regel erhalten wir bei unsern 6 Flächen

$3 + 6\times 4 = 27$ $\quad 3 + 1\times 4 = 7$ $\quad 3 + 0\times 4 = 3$

$3 + 3\times 4 = 15$ $\quad 3 + 0\times 4 = 3$

reelle Gerade, wobei die letzte Flächenart von der vorherigen dadurch unterschieden ist, daß sie aus 2 Stücken besteht. Dies stimmt genau mit der von Schlaefli gegebenen Aufzählung.

Die Bedeutung dieses Resultates wird noch durch folgenden Satz gesteigert:

Die so erhaltenen Repräsentanten der 5 Schlaefli'schen Flächenarten ohne Doppelpunkt sind zugleich <u>vollgültige Repräsentanten</u> der einzelnen Flächenarten <u>im Sinne der Analysis situs</u>, d.h. 2 Flächen derselben Schlaefli'schen Art gehen auseinander durch bloße continuierliche Abänderung der Gestalt hervor, ohne daß sie eine Fläche mit Doppelpunkt zu passieren brauchen, oder

auch alle Flächen derselben Art bilden in dem repräsentierenden Raume von 19 Dimensionen, der uns die Gesamtheit der Flächen 3ter Ordnung vorstellt, ein zusammenhängendes Gebiet.

Sie haben also in den F_3, die sie aus der Ausgangsfläche mit 4 Knoten durch die Prozesse (+) und (−) ableiten, typische Beispiele, wie die Schlaefli'schen Arten aussehen. (Natürlich ist es wichtig, die erhaltenen Flächen durch collineare Umformung umzugestalten, oder auch die 5 Flächentypen des F_3 mit 4 reellen Doppelpunkten zur Hand zu nehmen und an jedem Typus die Prozesse (+) und (−) anzubringen).

Aber nicht nur die F_3 ohne Doppelpunkt, sondern auch die F_3 mit beliebigen singulären Punkten können wir aus unserer F_3 mit 4 Doppelpunkten durch continuierliche Umformung herausbringen, und auch hierzu geben die Rodenberg'schen Modelle zahlreiche Beispiele. Ich kann das hier leider nicht genauer ausführen.

Wir fragen weiter: Wie gestaltet sich die analytische Behandlung der vorgeführten Modelle und von welcher Gleichungsform der F_3 geht man am besten dabei aus?

Ich komme da auf die Entdeckung von Sylvester

zu sprechen, nämlich dass es für die F_3 eine und nur ein sogenanntes Pentaeder giebt.

Hat man 5 Ebenen im Raume, von denen keine 4 durch einen Punkt und keine 3 durch eine Gerade gehen, so kann man das Coordinatensystem so fixieren, dass $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_5 = 0$ die Gleichung der Ebenen werden und noch eine beliebig anzunehmende lineare Relation zwischen den $x_1, x_2, \ldots x_5$ identisch besteht. Wir wählen diese Relation der Einfachheit halber als $\sum_1^5 x_i = 0$. Sylvester hat nun gefunden, dass für das ausgezeichnete, nach ihm benannte Pentaeder in der Gleichung für die Fläche nur noch die Cuben der x vorkommen, letztere also (immer unter der Bedingung $\sum_1^5 x_i = 0$) $\sum_1^5 k_i x_i^3 = 0$ lautet.

An diese kanonische Gleichungsform von Sylvester hat nun Rodenberg angeknüpft, um die geschilderten geometrischen Verhältnisse zu bestätigen. Die Gleichungsform enthält nur noch 4 von den ursprünglich in der Flächengleichung auftretenden 19 Constanten, und diese 4 müssen notwendigerweise bleiben, da nur 15 durch eine geeignete Coordinatentransformation zerstört werden können. Dabei können die Ebenen $x_i = 0$ natürlich noch reell oder imaginär sein.

Wir fassen insbesondere den Fall reeller Pentaeder

ebenen in's Auge und erhalten aus der Sylvester'schen Gleichungsform eine besonders einfache, von Clebsch als Diagonalfläche bezeichnete F_3, wenn wir die K_i sämmtlich = 1 wählen. Diese Diagonalfläche ist eine F_3 mit 27 reellen Geraden, welche in unserm Modell, welches ich vorzeige, des genaueren dargestellt sind. Das betr. Modell ist ursprünglich auf direkte Anregung von Clebsch durch A. Weiler ausgeführt worden, der mir auch bei meinen eigenen Arbeiten über Flächen 3ter Ordnung behülflich gewesen ist.

Was hat diese Fläche nun Besonderes, und woher ihr Name?

Schneiden wir die Fläche mit der Pentaederebene $x_1 = 0$, so erhalten wir zunächst in der Ebene $x_1 = 0$ selbst ein Vierseit: $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, gebildet von den Spuren der übrigen 4 Pentaederebenen, und ausserdem die Schnittcurve mit der Fläche

$$x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0.$$

Nun zeigt sich (vermöge $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$), dass diese Schnittcurve aus den 3 Diagonalen des genannten Vierseits besteht. Daher der Name der Fläche. Also:

Der Name „Diagonalfläche" kommt davon, dass die Fläche in jeder der 5 Pentaederflächen die 3 Diagonalen desjenigen Vierseits enthält, welches aus den Pentaeder

ebene von den übrigen 4 ausgeschnitten wird.

Damit sind zunächst 3·5 = 15 Geraden auf der Fläche nachgewiesen. Auf die fehlenden 12 gehe ich hier nicht weiter ein; Sie werden dieselben auf dem Flächenmodell leicht herausfinden.

Von den 15 Geraden gilt als weiterer Satz, daß sie sich zehnmal zu dreien schneiden. Man hat nur zu bedenken, daß in jeder Pentaederecke (wo 3 Ebenen des Pentaeders sich schneiden) 3 Diagonalen (in jeder Ebene eine) zusammenlaufen, und daß das Pentaeder 10 Ecken hat. Also:

Die 15 Geraden laufen zehnmal zu 3 durch die Eckpunkte des Pentaeders und schneiden sich also kurz gesagt 10 mal zu je 3. Dies ist am Modell wieder leicht nachzusehen.

Damit bin ich hier am Ende. Sie werden jetzt in großen Umrissen die Lehre von den Gestalten der Fz verstehen; die Einzelheiten müssen dem Selbststudium vorbehalten bleiben. —

Und nun lassen Sie mich diese Vorlesung mit folgender Überlegung schließen:

Ich habe in der Vorlesung allerlei vorgetragen, was gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern über die

behandelten Gegenstände zu finden ist, was aber die Voraussetzung und stillschweigende Annahme der gewöhnlichen Entwickelungen bildet. Ich wollte Sie damit veranlassen, mit freiem Blick und unabhängigem Urteil die Dinge selbst zu erfassen. Denken Sie etwa an das, was ich über die empirische Curve oder Fläche sagte, und an die conventionelle Beschränkung der Betrachtung auf analytische Gebilde. —

Mit der Mathematik ist es wie mit der bildenden Kunst. Es ist nicht nur nützlich, sondern durchaus notwendig, daß man von seinen Vorgängern lernt. Wenn man sich aber ausschließlich auf das Studium des Überkommenen beschränkt, also nur auf dem weiterbaut, was man in den Büchern liest, so entsteht das, was ich als scholastisches System bezeichne. Hiergegen ergeht dann die Mahnung: Zurück zur eigenen lebendigen Auffassung, zurück zur Natur, welche die nächste Lehrmeisterin bleibt!

Ende

OCT 17
NOV. 6
DUE MAR 14 1922
DUE DEC 1 41
DUE NOV 16 41
DUE DEC 16 41